Corrigé de la Feuille d'exercices n°3 – Polynome et Arithmetique

Année 2025-26

Exercice 1

Exercice 12 Soient $A = X^7 - X - 1$ et $B = X^5 - 1$. Trouver deux polynomes U, $V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.

Solution

Étape 1 : Application de l'algorithme d'Euclide pour le PGCD
L'algorithme d'Euclide effectue des divisions polynomiales successives jusqu'à ce que le reste soit constant. Notez que $\deg(A) = 7$ et $\deg(B) = 5$.
Étape 1.1 : Division de A par B

$$A = X^7 - X - 1$$
$$B = X^5 - 1$$

Quotient $Q_1 = X^2$ (car $X^7/X^5 = X^2$).

$$X^2 \cdot B = X^2(X^5 - 1) = X^7 - X^2$$

Reste $R_1 = A - Q_1B = (X^7 - X - 1) - (X^7 - X^2) = X^2 - X - 1$.

$$R_1 = X^2 - X - 1 \quad \text{(degré 2)}$$

Étape 1.2 : Division de B par R1

$$B = X^5 - 1$$
$$R_1 = X^2 - X - 1$$

Nous effectuons la division polynomiale longue (Ou vous pouvez utiliser la division longue comme nous l'avons fait en classe, c'était juste pour que ce soit plus pratique à taper) :

— Étape 1 : $X^5/X^2 = X^3$.
  $X^3 \cdot R_1 = X^3(X^2 - X - 1) = X^5 - X^4 - X^3$.
  Reste temp. : $B - X^3R_1 = (X^5 - 1) - (X^5 - X^4 - X^3) = X^4 + X^3 - 1$ (degré 4).
— Étape 2 (degré $4 \geq 2$) : $X^4/X^2 = X^2$.
  $X^2 \cdot R_1 = X^2(X^2 - X - 1) = X^4 - X^3 - X^2$.
  Reste temp. : $(X^4 + X^3 - 1) - (X^4 - X^3 - X^2) = 2X^3 + X^2 - 1$ (degré 3).

— Étape 3 (degré $3 \geq 2$) : $2X^3/X^2 = 2X$.
$2X \cdot R_1 = 2X(X^2 - X - 1) = 2X^3 - 2X^2 - 2X$.
Reste temp. : $(2X^3 + X^2 - 1) - (2X^3 - 2X^2 - 2X) = 3X^2 + 2X - 1$ (degré 2).
— Étape 4 (degré $2 = 2$) : $3X^2/X^2 = 3$.
$3 \cdot R_1 = 3(X^2 - X - 1) = 3X^2 - 3X - 3$.
Reste $R_2 = (3X^2 + 2X - 1) - (3X^2 - 3X - 3) = 5X + 2$ (degré 1).

Quotient $Q_2 = X^3 + X^2 + 2X + 3$.

$$R_2 = 5X + 2$$

Étape 1.3 : Division de R1 par R2

$$\begin{aligned} R_1 &= X^2 - X - 1 \\ R_2 &= 5X + 2 \end{aligned}$$

Division polynomiale (degré 2 ÷ degré 1) :
— Étape 1 : $X^2/(5X) = \frac{1}{5}X$.
$\frac{1}{5}X \cdot R_2 = \frac{1}{5}X(5X + 2) = X^2 + \frac{2}{5}X$.
Reste temp. : $(X^2 - X - 1) - (X^2 + \frac{2}{5}X) = -X - \frac{2}{5}X - 1 = -\frac{7}{5}X - 1$ (degré 1).
— Étape 2 (degré $1 = 1$) : $(-\frac{7}{5}X)/(5X) = -\frac{7/5}{5} = -\frac{7}{25}$.
$-\frac{7}{25} \cdot R_2 = -\frac{7}{25}(5X + 2) = -\frac{35}{25}X - \frac{14}{25} = -\frac{7}{5}X - \frac{14}{25}$.
Reste $R_3 = (-\frac{7}{5}X - 1) - (-\frac{7}{5}X - \frac{14}{25}) = -1 + \frac{14}{25} = -\frac{25}{25} + \frac{14}{25} = -\frac{11}{25}$.

Quotient $Q_3 = \frac{1}{5}X - \frac{7}{25}$.

$$R_3 = -\frac{11}{25} \quad \text{(constante, degré 0)}$$

Étape 1.4 : Condition d'arrêt Le reste R_3 est une constante non nulle ($-\frac{11}{25}$), donc le PGCD(A, B) est une constante (A et B sont premiers entre eux). Nous pouvons continuer avec la partie étendue pour trouver U et V.

Étape 2 : Partie étendue (Remontée pour U et V)

Maintenant, nous remontons pour exprimer R_3 comme une combinaison linéaire de A et B : $R_3 = AU' + BV'$. Ensuite, comme nous voulons $= 1$, et que $R_3 = -\frac{11}{25}$, nous aurons $U = U' \cdot (-\frac{25}{11})$ et $V = V' \cdot (-\frac{25}{11})$.

Étape 2.1 : Partir de $R_3 = R_1 - Q_3R_2$

$$R_3 = R_1 - Q_3R_2$$

Étape 2.2 : Substituer $R_2 = B - Q_2R_1$

$$\begin{aligned} R_3 &= R_1 - Q_3(B - Q_2R_1) \\ &= R_1 - Q_3B + Q_3Q_2R_1 \\ &= (1 + Q_3Q_2)R_1 - Q_3B \end{aligned}$$

Étape 2.3 : Substituer $R_1 = A - Q_1B$

$$\begin{aligned} R_3 &= (1 + Q_3Q_2)(A - Q_1B) - Q_3B \\ &= (1 + Q_3Q_2)A - (1 + Q_3Q_2)Q_1B - Q_3B \\ &= (1 + Q_3Q_2)A - [(1 + Q_3Q_2)Q_1 + Q_3]B \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} U' &= 1 + Q_3Q_2 \\ V' &= -[(1 + Q_3Q_2)Q_1 + Q_3] \end{aligned}$$

Étape 2.4 : Calculer Q_3Q_2

$$\begin{aligned} Q_3 &= \frac{1}{5}X - \frac{7}{25} \\ Q_2 &= X^3 + X^2 + 2X + 3 \end{aligned}$$

— $\frac{1}{5}X \cdot Q_2 = \frac{1}{5}(X^4 + X^3 + 2X^2 + 3X) = \frac{1}{5}X^4 + \frac{1}{5}X^3 + \frac{2}{5}X^2 + \frac{3}{5}X$
— $-\frac{7}{25} \cdot Q_2 = -\frac{7}{25}X^3 - \frac{7}{25}X^2 - \frac{14}{25}X - \frac{21}{25}$

En combinant (dénominateur commun 25) :

— $X^4 : \frac{5}{25}$
— $X^3 : \frac{5}{25} - \frac{7}{25} = -\frac{2}{25}$
— $X^2 : \frac{10}{25} - \frac{7}{25} = \frac{3}{25}$
— $X : \frac{15}{25} - \frac{14}{25} = \frac{1}{25}$
— Constante : $-\frac{21}{25}$

$$Q_3Q_2 = \frac{5}{25}X^4 - \frac{2}{25}X^3 + \frac{3}{25}X^2 + \frac{1}{25}X - \frac{21}{25}$$

Étape 2.5 : Calculer $U' = 1 + Q_3Q_2$ $1 = \frac{25}{25}$. Le terme constant devient : $\frac{25}{25} - \frac{21}{25} = \frac{4}{25}$.

$$U' = \frac{5}{25}X^4 - \frac{2}{25}X^3 + \frac{3}{25}X^2 + \frac{1}{25}X + \frac{4}{25}$$

Ou écrit :

$$U' = \frac{1}{25}(5X^4 - 2X^3 + 3X^2 + X + 4)$$

Étape 2.6 : Calculer V' Rappel : $V' = -[U'Q_1 + Q_3]$.

— D'abord, $U'Q_1 = U' \cdot X^2 = \frac{1}{25}(5X^6 - 2X^5 + 3X^4 + X^3 + 4X^2)$.
— Ajoutons $Q_3 = \frac{1}{5}X - \frac{7}{25} = \frac{5}{25}X - \frac{7}{25}$.
— La somme $[U'Q_1 + Q_3]$ est :
$\frac{5}{25}X^6 - \frac{2}{25}X^5 + \frac{3}{25}X^4 + \frac{1}{25}X^3 + \frac{4}{25}X^2 + \frac{5}{25}X - \frac{7}{25}$.

Donc $V' = -$[Somme] :

$$V' = \frac{1}{25}(-5X^6 + 2X^5 - 3X^4 - X^3 - 4X^2 - 5X + 7)$$

Étape 2.7 : Mise à l'échelle pour obtenir = 1 Nous avons $R_3 = -\frac{11}{25} = AU' + BV'$. Pour obtenir 1, nous multiplions tout par $(-\frac{25}{11})$:

$$1 = A\left(U' \cdot \left(-\frac{25}{11}\right)\right) + B\left(V' \cdot \left(-\frac{25}{11}\right)\right)$$

Calculons U et V :

$$\begin{aligned} U &= U' \cdot \left(-\frac{25}{11}\right) \\ &= \left[\frac{1}{25}(5X^4 - 2X^3 + 3X^2 + X + 4)\right] \cdot \left(-\frac{25}{11}\right) \\ &= -\frac{1}{11}(5X^4 - 2X^3 + 3X^2 + X + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= V' \cdot \left(-\frac{25}{11}\right) \\ &= \left[\frac{1}{25}(-5X^6 + 2X^5 - 3X^4 - X^3 - 4X^2 - 5X + 7)\right] \cdot \left(-\frac{25}{11}\right) \\ &= \frac{1}{11}(5X^6 - 2X^5 + 3X^4 + X^3 + 4X^2 + 5X - 7) \end{aligned}$$

Résultat final

$$U = -\frac{1}{11}(5X^4 - 2X^3 + 3X^2 + X + 4)$$

$$V = \frac{1}{11}(5X^6 - 2X^5 + 3X^4 + X^3 + 4X^2 + 5X - 7)$$

Vérification et remarques

- Vous pouvez utiliser un logiciel de calcul formel (comme Mathematica ou Sage) pour vérifier si $AU + BV$ est bien égal à 1.
- **Remarque :** U et V ne sont pas uniques. Toute solution de la forme $U' = U + BK$ et $V' = V - AK$ (où K est un polynôme quelconque) est également une solution. La solution trouvée est celle de degré minimal (pour U).

Exercice 2

Exercice 22 Soit P un polynome de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On cherche à montrer qu'il existe S, $T \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = S^2 + T^2$.

1. Verifier l'identite remarquable $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2$.
2. Resoudre le problème pour P de degre 2.
3. Conclure.

Solution

1. On developpe le membre de droite de l'identite [9, 10, 11, 12] :

$$\begin{aligned} (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2 &= (a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2) + (b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2) \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2 \\ &= a^2(c^2 + d^2) + b^2(d^2 + c^2) \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \end{aligned}$$

   L'identite est verifiee. Elle montre que l'ensemble des polynomes qui sont des sommes de deux carres est stable par multiplication.

2. Soit $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour que $P(x)$ reste positif lorsque $x \to \pm\infty$, le coefficient dominant a doit être positif. Si $a = 0$, $P(X) = bX + c$. Pour que $P(x) \geq 0$ pour tout x, il faut $b = 0$ et $c \geq 0$. Alors $P(X) = c = (\sqrt{c})^2 + 0^2$. $S = \sqrt{c}$ et $T = 0$. Si $a > 0$, pour que $P(x) \geq 0$ pour tout x, le polynome ne peut pas avoir deux racines reelles distinctes, sinon il changerait de signe. Son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ doit être negatif ou nul ($\Delta \leq 0$).[13, 14] On met P sous forme canonique (completion du carre) :

$$P(X) = a\left(X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$P(X) = a\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Puisque $a > 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$, le terme $4ac - b^2 \geq 0$. On peut donc poser : $S(X) = \sqrt{a}\left(X + \frac{b}{2a}\right) \in \mathbb{R}[X]$ $T(X) = \sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}} \in \mathbb{R}$ (polynome constant) On a bien $P(X) = S(X)^2 + T(X)^2$.

3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$. On utilise la decomposition en facteurs irreductibles dans $\mathbb{R}[X]$ [2, 14, 15] :

$$P(X) = \lambda \cdot \prod_i (X - r_i)^{\alpha_i} \cdot \prod_j (X^2 + a_j X + b_j)^{\beta_j}$$

où les r_i sont les racines reelles, et les $X^2 + a_j X + b_j$ sont les facteurs irreductibles de degre 2 (avec $\Delta_j < 0$).

— **Coefficient dominant λ :** Puisque $P(x) \geq 0$, on doit avoir $\lambda > 0$. On peut ecrire $\lambda = (\sqrt{\lambda})^2 + 0^2$. C'est une somme de deux carres.

— **Racines reelles r_i :** Si une multiplicite α_i etait impaire, $P(x)$ changerait de signe en r_i, ce qui contredit $P(x) \geq 0$. Donc, toutes les α_i sont paires. Posons $\alpha_i = 2k_i$. Le facteur $(X - r_i)^{\alpha_i} = (X - r_i)^{2k_i} = \left[(X - r_i)^{k_i}\right]^2 + 0^2$. C'est une somme de deux carres.

— **Facteurs de degre 2 :** Pour $Q_j(X) = X^2 + a_j X + b_j$, on a $\Delta_j < 0$. Comme son coefficient dominant (1) est positif, $Q_j(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 2, $Q_j(X)$ peut s'ecrire $S_j(X)^2 + T_j(X)^2$. Les facteurs $(Q_j(X))^{\beta_j} = (S_j^2 + T_j^2)^{\beta_j}$ sont aussi des sommes de deux carres (par recurrence en utilisant l'identite de la question 1).

$P(X)$ est un produit de termes qui sont tous des sommes de deux carres. En appliquant l'identite de la question 1 de manière repetee (par recurrence), le produit final $P(X)$ est lui-même une somme de deux carres $S^2 + T^2$.

Exercice 3

Exercices 24 Determiner toutes les valeurs de $a \in \mathbb{C}$ telles que le polynome $P = X^3 + X^2 + aX + 6$ admet deux racines b et c verifiant $b + c = bc$. Determiner alors toutes les racines du polynome.

Solution

Soit d la troisième racine de P. P est de degre 3. On utilise les relations entre les coefficients et les racines (formules de Viète) [16] : (1) $b + c + d = -1$ (coefficient de X^2) (2) $bc + bd + cd = a$ (coefficient de X^1) (3) $bcd = -6$ (coefficient de X^0)
On ajoute la condition de l'enonce : (4) $b + c = bc$
Posons $K = b + c = bc$. D'après (3), $bcd = (bc)d = K \cdot d = -6$. D'après (1), $(b + c) + d = K + d = -1$. Nous avons un système de deux equations pour K et d : (A) $K \cdot d = -6$ (B) $K + d = -1 \implies d = -1 - K$
On substitue (B) dans (A) : $K(-1 - K) = -6$ $-K - K^2 = -6$ $K^2 + K - 6 = 0$
On factorise cette equation du second degre en K : $(K - 2)(K + 3) = 0$ Les deux valeurs possibles pour K sont $K = 2$ et $K = -3$.
Cas 1 : $K = 2$.

— $b + c = 2$ et $bc = 2$.

— b et c sont les racines de l'equation $Z^2-(b+c)Z+bc=0$, soit $Z^2-2Z+2=0$.
— $\Delta=(-2)^2-4(1)(2)=4-8=-4=(2i)^2$.
— $b,c=\frac{2\pm 2i}{2}=\{1+i,1-i\}$.
— La troisième racine est $d=-1-K=-1-2=-3$.
— Les racines sont $\{-3,1+i,1-i\}$.
— On calcule a avec la relation (2) : $a=bc+bd+cd=bc+d(b+c)=K+d(K)=2+(-3)(2)=2-6=-4$.

Cas 2 : $K=-3$.
— $b+c=-3$ et $bc=-3$.
— b et c sont les racines de $Z^2-(-3)Z+(-3)=0$, soit $Z^2+3Z-3=0$.
— $\Delta=3^2-4(1)(-3)=9+12=21$.
— $b,c=\{\frac{-3+\sqrt{21}}{2},\frac{-3-\sqrt{21}}{2}\}$.
— La troisième racine est $d=-1-K=-1-(-3)=2$.
— Les racines sont $\{2,\frac{-3+\sqrt{21}}{2},\frac{-3-\sqrt{21}}{2}\}$.
— On calcule a : $a=bc+d(b+c)=K+d(K)=-3+(2)(-3)=-3-6=-9$.

Les deux valeurs possibles pour a sont $a=-4$ et $a=-9$.

Exercice 4

Exercice 25 1. Soit $P=1-X+X^2-X^3$. Factoriser ce polynome dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$. 2. Soit $P=1-X+X^2+\cdots+(-1)^nX^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kX^k$. Determiner les racines de P dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

Solution

1. $P=1-X+X^2-X^3$. On regroupe les termes : $P=(1-X)+(X^2-X^3)=(1-X)+X^2(1-X)$ $P=(1-X)(1+X^2)$

Dans $\mathbb{R}[X]$ **:** Le facteur X^2+1 a un discriminant $\Delta=-4<0$, il est donc irreductible sur $\mathbb{R}$.[2] La decomposition est $P=(1-X)(X^2+1)$. (Ou $-(X-1)(X^2+1)$).

Dans $\mathbb{C}[X]$ **:** Le facteur X^2+1 se decompose en $X^2-(i^2)=(X-i)(X+i)$.[2] La decomposition est $P=(1-X)(X-i)(X+i)$.

2. Soit $P=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kX^k=\sum_{k=0}^{n}(-X)^k$. Il s'agit de la somme d'une serie geometrique de raison $r=-X$.[17] La formule de la somme est $P(X)=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

$$P(X)=\frac{1-(-X)^{n+1}}{1-(-X)}=\frac{1-(-1)^{n+1}X^{n+1}}{1+X}$$

On doit d'abord verifier le cas où le denominateur est nul, $X=-1$:

$$P(-1)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{2k}=\sum_{k=0}^{n}1=n+1$$

Puisque $n\geq 0$ (implicitement, pour avoir au moins $1-X$), $P(-1)\neq 0$. Donc $X=-1$ n'est jamais racine. Les racines de P sont les $X\neq -1$ qui annulent le numerateur :

$$1-(-1)^{n+1}X^{n+1}=0 \iff X^{n+1}=\frac{1}{(-1)^{n+1}}=(-1)^{-(n+1)}=(-1)^{n+1}$$

(Car k et $-k$ ont la même parite).

On distingue deux cas selon la parite de n :
Cas 1 : n est impair. Alors $n+1$ est pair. L'equation devient $X^{n+1} = (-1)^{\text{pair}} = 1$. Les racines sont les $(n+1)$-ièmes racines de l'unite, $x_k = \exp\left(i\frac{2k\pi}{n+1}\right)$ pour $k \in \{0, \ldots, n\}$. Nous devons exclure $X = -1$. $X = -1$ est une racine de l'unite car $n+1$ est pair ; elle correspond à $k = (n+1)/2$.

— **Racines dans $\mathbb{C}$:** $\left\{\exp\left(i\frac{2k\pi}{n+1}\right) \mid k \in \{0, \ldots, n\} \setminus \{(n+1)/2\}\right\}$.
— **Racines dans $\mathbb{R}$:** Les racines reelles de $X^{n+1} = 1$ (avec $n+1$ pair) sont 1 (pour $k = 0$) et -1 (pour $k = (n+1)/2$). Puisqu'on exclut -1, la seule racine reelle est $X = 1$.

Cas 2 : n est pair. Alors $n+1$ est impair. L'equation devient $X^{n+1} = (-1)^{\text{impair}} = -1$. Les racines sont les $(n+1)$-ièmes racines de -1, $x_k = \exp\left(i\frac{\pi+2k\pi}{n+1}\right)$ pour $k \in \{0, \ldots, n\}$. Nous devons exclure $X = -1$. $X = -1 = e^{i\pi}$ est une racine de $X^{n+1} = -1$ car $n+1$ est impair ; elle correspond à $k = n/2$.

— **Racines dans $\mathbb{C}$:** $\left\{\exp\left(i\frac{\pi(1+2k)}{n+1}\right) \mid k \in \{0, \ldots, n\} \setminus \{n/2\}\right\}$.
— **Racines dans $\mathbb{R}$:** La seule racine reelle de $X^{n+1} = -1$ (avec $n+1$ impair) est $X = -1$. Puisqu'on exclut cette valeur, il n'y a **aucune racine reelle**.

Exercice 5

Exercice 28 Soit le polynome $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$. 1. Montrer que j est racine de ce polynome. Determiner son ordre de multiplicite. 2. Quelle consequence peut-on tirer de la parite de P ? 3. Decomposer P en facteurs irreductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution

1. **Racine j :** On remarque que P est un polynome en X^2. Posons $Y = X^2$. $Q(Y) = Y^4 + 2Y^3 + 3Y^2 + 2Y + 1$. On reconnaît une identite remarquable (polynome reciproque) : $Q(Y) = (Y^2 + Y + 1)^2$. Donc, $P(X) = (X^4 + X^2 + 1)^2$. Soit $R(X) = X^4 + X^2 + 1$. On a $P(X) = R(X)^2$. Le nombre $j = e^{i2\pi/3}$ est une racine de $X^2 + X + 1$. On a donc $j^2 + j + 1 = 0$ et $j^3 = 1$.[8, 2] Calculons $R(j)$: $R(j) = j^4 + j^2 + 1 = (j^3)j + j^2 + 1 = 1 \cdot j + j^2 + 1 = j + j^2 + 1 = 0$. Puisque $P(j) = (R(j))^2$, on a $P(j) = 0^2 = 0$. j est bien racine de P.
Multiplicite : On utilise la caracterisation par les derivees successives.[2] $P(j) = 0$. $P'(X) = 2R(X)R'(X)$. $P'(j) = 2R(j)R'(j) = 2 \cdot (0) \cdot R'(j) = 0$. La multiplicite est au moins 2. $P''(X) = 2(R'(X))^2 + 2R(X)R''(X)$. $P''(j) = 2(R'(j))^2 + 2R(j)R''(j) = 2(R'(j))^2 + 0$. Calculons $R'(X) = 4X^3 + 2X$. $R'(j) = 4j^3 + 2j = 4(1) + 2j = 4 + 2j$. Puisque $j \notin \mathbb{R}$, $R'(j) \neq 0$. Donc $P''(j) = 2(4+2j)^2 \neq 0$. $P(j) = 0$, $P'(j) = 0$ et $P''(j) \neq 0$. L'ordre de multiplicite de j est exactement 2.
2. **Parite :** $P(X)$ ne contient que des puissances paires de X. $P(-X) = (-X)^8 + 2(-X)^6 + \cdots + 1 = X^8 + 2X^6 + \cdots + 1 = P(X)$. P est un polynome pair. **Consequence :** Si r est une racine de P de multiplicite m, alors $-r$ est aussi une racine de P avec la même multiplicite m. (En effet, si j est racine de multiplicite 2, j^2 (son conjugue, car P est reel) est aussi racine de multiplicite 2. Par parite, $-j$ et $-j^2$ sont aussi des racines de multiplicite 2).
3. **Decomposition :** On part de $P(X) = (X^4 + X^2 + 1)^2$. On factorise $R(X) = X^4 + X^2 + 1$ en utilisant l'astuce de la completion du carre : $R(X) = (X^4 + 2X^2 +$

$1) - X^2 = (X^2+1)^2 - X^2$ C'est une difference de carres $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$: $R(X) = (X^2+1-X)(X^2+1+X) = (X^2-X+1)(X^2+X+1)$.
Dans $\mathbb{R}[X]$: $P(X) = (R(X))^2 = \left[(X^2-X+1)(X^2+X+1)\right]^2$

$$P(X) = (X^2-X+1)^2(X^2+X+1)^2$$

Les polynomes X^2-X+1 ($\Delta = 1-4 = -3 < 0$) et X^2+X+1 ($\Delta = 1-4 = -3 < 0$) sont irreductibles sur $\mathbb{R}$.[2] C'est la decomposition en irreductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.
Dans $\mathbb{C}[X]$: On decompose les facteurs de degre 2 :

- $X^2+X+1 = (X-j)(X-j^2)$
- X^2-X+1. Les racines sont $\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Ces racines sont $e^{i\pi/3} = -j^2$ et $e^{-i\pi/3} = -j$.[8] $X^2-X+1 = (X-(-j^2))(X-(-j)) = (X+j^2)(X+j)$.

On reporte dans $P(X) = (R(X))^2$:

$$P(X) = \left[(X-j)(X-j^2)(X+j)(X+j^2)\right]^2$$

$$P(X) = (X-j)^2(X-j^2)^2(X+j)^2(X+j^2)^2$$

C'est la decomposition en irreductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 6

Exercice 30 Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes (sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$) :

4. $F_4(X) = \dfrac{X^6}{X^5 - X}$.
5. $F_5(X) = \dfrac{X^6+1}{X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1}$
6. $F_6(X) = \dfrac{1}{X^n - 1}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Solution

4. Soit $F_4(X) = \frac{X^6}{X^5-X}$. $Q(X) = X^5 - X = X(X^4-1) = X(X^2-1)(X^2+1) = X(X-1)(X+1)(X^2+1)$. Le degre du numerateur (6) est superieur au degre du denominateur (5). Il y a une partie entière $E(X)$. Division euclidienne de $A = X^6$ par $Q = X^5 - X$: $X^6 = X(X^5-X) + X^2$. Partie entière $E(X) = X$. Reste $R(X) = X^2$. $F_4(X) = X + \frac{X^2}{X^5-X} = X + \frac{X^2}{X(X^4-1)} = X + \frac{X}{X^4-1}$. Soit $G(X) = \frac{X}{X^4-1}$. $G(X)$ a pour poles simples $\pm 1, \pm i$. Forme de la decomposition de $G(X)$: $G(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{d}{X+i}$.
   Calcul des coefficients de $G(X)$ sur $\mathbb{C}$:
   a (pole 1) : $a = \left[\frac{X}{4X^3}\right]_{X=1} = \frac{1}{4}$.
   b (pole -1) : $b = \left[\frac{X}{4X^3}\right]_{X=-1} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$.
   c (pole i) : $c = \left[\frac{X}{4X^3}\right]_{X=i} = \frac{i}{4i^3} = \frac{1}{4i^2} = -\frac{1}{4}$.
   d (pole $-i$) : $d = \overline{c} = -\frac{1}{4}$.

Decomposition dans $\mathbb{C}(X)$:

$$F_4(X) = X + \frac{1}{4}\frac{1}{X-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{X+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{X-i} - \frac{1}{4}\frac{1}{X+i}$$

Decomposition dans $\mathbb{R}(X)$: On regroupe les poles conjugues i et $-i$: $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{X-i}+\frac{1}{X+i}\right) = -\frac{1}{4}\frac{X+i+X-i}{(X-i)(X+i)} = -\frac{1}{4}\frac{2X}{X^2+1} = -\frac{1}{2}\frac{X}{X^2+1}$.

$$F_4(X) = X + \frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{4(X+1)} - \frac{1}{2}\frac{X}{X^2+1}$$

5. Soit $F_5(X) = \frac{X^6+1}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1}$. On a serie geometrique : $1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5 = \sum_{k=0}^{5}(-X)^k = \frac{1-(-X)^6}{1-(-X)} = \frac{1-X^6}{1+X}$. Donc denominateur est : $\frac{X^6-1}{1+X}$, et $F_5(X) = \frac{(X^6-1+2)(X+1)}{X^6-1} = X + 1 + 2\frac{X+1}{X^6-1}$.
   On a $X^6 - 1 = \prod_{k=0}^{5}(X - e^{\frac{2k\pi i}{6}}) = (X-1)(X-e^{\frac{\pi i}{3}})(X-e^{\frac{2\pi i}{3}})(X-e^{\pi i})(X-e^{\frac{4\pi i}{3}})(X-e^{\frac{5\pi i}{3}})$. Regrouper les racines et son conjuge ($e^{\frac{2k\pi i}{6}}$ et $e^{\frac{2(6-k)\pi i}{6}}$ sont conjuge), on a
   $X^6 - 1 = (X-1)(X-e^{\frac{\pi i}{3}})(X-e^{\frac{5\pi i}{3}})(X+1)(X-e^{\frac{2\pi i}{3}})(X-e^{\frac{4\pi i}{3}})$
   Soit $G(X) = \frac{2(X+1)}{X^6-1}$, on a $G(X) = \frac{2}{(X-e^{\frac{\pi i}{3}})(X-e^{\frac{5\pi i}{3}})(X-1)(X-e^{\frac{2\pi i}{3}})(X-e^{\frac{4\pi i}{3}})} = \frac{2}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1}$. On pose $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ et $j' = e^{\frac{\pi i}{3}}$, on sait $(X-e^{\frac{2\pi i}{3}})(X-e^{\frac{4\pi i}{3}}) = (X-j)(X-j^2) = X^2+X+1$ et $(X-e^{\frac{\pi i}{3}})(X-e^{\frac{5\pi i}{3}}) = (X-j')(X-\overline{j'}) = X^2-X+1$. (On peux utiliser que une j car en fait on a $j' = -j^2$ et $\overline{j'} = -j$.)
   Sur $\mathbb{C}$: Par thm du cours, on sait que $G(X) = \frac{2(X+1)}{X^6-1} = \sum_{k=0,1,2,4,5}\frac{c_k}{X-e^{\frac{k\pi i}{3}}}$ ou $c_k = \frac{2(e^{\frac{k\pi i}{3}}+1)}{6(e^{\frac{k\pi i}{3}})^5} = \frac{e^{\frac{k\pi i}{3}}+1}{3e^{\frac{-k\pi i}{3}}}$. On a $c_0 = \frac{2}{3}$, $c_1 = \frac{j'+1}{3\overline{j'}}$, $c_5 = \frac{\overline{j'}+1}{3j'}$, $c_2 = \frac{j+1}{3j^2} = -\frac{1}{3} = c_4$.
   $F_5(X) = X + 1 + \sum_{k=0,1,2,4,5}\frac{c_k}{X-e^{\frac{k\pi i}{3}}}$.
   Sur $\mathbb{R}$: On doit remarquer que $j^2+j+1=0$, $j^3=1$ et $j'^2-j'+1=0$ et $j'^3=-1$. $G(X) = \frac{2(X+1)}{X^6-1} = \frac{2}{3}\frac{1}{X-1} + \frac{-1}{3}(\frac{1}{X-j}+\frac{1}{X-j^2}) + (\frac{j'+1}{3\overline{j'}}\frac{1}{X-j'} + \frac{\overline{j'}+1}{3j'}\frac{1}{X-\overline{j'}})$.
   On a $\frac{-1}{3}(\frac{1}{X-j}+\frac{1}{X-j^2}) = \frac{-1}{3}\frac{2X+1}{X^2+X+1})$. Et on a $\frac{j'+1}{3\overline{j'}}\frac{1}{X-j'} + \frac{\overline{j'}+1}{3j'}\frac{1}{X-\overline{j'}} = \frac{-1}{X^2-X+1}$.
   Conclusion : ....
6. **Décomposition de** $F_6 = \frac{1}{X^n-1}$
   Les pôles sont les racines n-ièmes de l'unité : $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k \in \{0,\dots,n-1\}$. Ce sont des pôles simples.
   Sur $\mathbb{C}$: La formule pour un pôle simple α d'une fraction $1/Q(X)$ est $\frac{1}{Q'(\alpha)}$. Ici $Q'(X) = nX^{n-1}$. Le coefficient associé à ω_k est :

$$\frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n\omega_k^n} = \frac{\omega_k}{n} \quad (\text{car } \omega_k^n = 1)$$

   Résultat sur $\mathbb{C}$:

$$\boxed{\frac{1}{X^n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k}{n(X-\omega_k)}}$$

Sur $\mathbb{R}$: Il faut regrouper les racines conjuguées ω_k et $\bar{\omega_k} = \omega_{n-k}$. Le terme regroupé est :

$$\frac{\omega_k}{n(X-\omega_k)} + \frac{\bar{\omega_k}}{n(X-\bar{\omega_k})} = \frac{1}{n}\frac{\omega_k(X-\bar{\omega_k}) + \bar{\omega_k}(X-\omega_k)}{X^2 - 2\cos(\frac{2k\pi}{n})X + 1}$$

Le numérateur vaut $X(\omega_k + \bar{\omega_k}) - 2\omega_k\bar{\omega_k} = 2X\cos(\frac{2k\pi}{n}) - 2$. Donc le terme réel est $\frac{2}{n}\frac{X\cos(\theta_k)-1}{X^2-2X\cos(\theta_k)+1}$ avec $\theta_k = \frac{2k\pi}{n}$.
Cas 1 : n impair ($n = 2m+1$). Seule racine réelle : 1.

$$\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n(X-1)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{2}{n}\frac{X\cos(\frac{2k\pi}{n}) - 1}{X^2 - 2X\cos(\frac{2k\pi}{n}) + 1}$$

Cas 2 : n pair ($n = 2m$). Racines réelles : 1 et -1. Le coefficient pour -1 (obtenu pour $k = m$) est $\frac{-1}{n(X+1)}$.

$$\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n(X-1)} - \frac{1}{n(X+1)} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{2}{n}\frac{X\cos(\frac{2k\pi}{n}) - 1}{X^2 - 2X\cos(\frac{2k\pi}{n}) + 1}$$