Corrigé de la Feuille d'exercices n°2 – Nombres complexes

Université Paris Cité – MM1

Année 2025-26

Exercice 1

Exercice 17. Question 7. Exprimer comme produit de facteurs linéaires $z^2 - 2z + 4i$.

Solution

Pour l'equation $z^2 - 2z + 4i = 0$, on a $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(4i) = 4 - 16i = 4(1 - 4i)$. Racines carrées de $1 - 4i$: $(x + iy)^2 = 1 - 4i \implies x^2 - y^2 = 1, 2xy = -4, x^2 + y^2 = \sqrt{17}$. $x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}}, y = \mp\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$, donc les deux racines de $1 - 4i$ sont $\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$. Soit δ_0 une racine carrée de $1 - 4i$. Racines carrées de Δ : $\pm 2\delta_0$. Les solution de $z^2 - 2z + 4i = 0$ sont $z = \frac{2 \pm 2\delta_0}{2} = 1 \pm \delta_0$. $P(z) = (z - (1 + \delta_0))(z - (1 - \delta_0))$.

Exercice 2

Exercice 19.

1. Déterminer les formes cartésiennes, trigonométriques et exponentielles des racines 4-èmes de $1 + i\sqrt{3}$.
2. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Solution

1. Soit $w = 1 + i\sqrt{3}$. Nous cherchons les nombres complexes z tels que $z^4 = w$.
   Étape 1 : Forme exponentielle de w
   D'abord, mettons w sous forme exponentielle.
   — Module : $|w| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$.
   — Argument : $\arg(w) = \theta$ tel que $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\theta = \frac{\pi}{3}$.
   La forme exponentielle de w est $w = 2e^{i\pi/3}$.
   Étape 2 : Formes exponentielles et trigonométriques des racines 4-èmes
   Les racines 4-èmes de $w = re^{i\theta}$ sont données par la formule $z_k = r^{1/4}e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{4})}$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Ici, $r = 2$ et $\theta = \pi/3$. Le module des racines est $2^{1/4} = \sqrt{2}$.
   — Pour $k = 0$: $z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi/3}{4}} = \sqrt{2}e^{i\pi/12}$.

Forme trigonométrique : $z_0 = \sqrt{2}(\cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12))$.

— Pour $k = 1$: $z_1 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2})} = \sqrt{2}e^{i7\pi/12}$.
Forme trigonométrique : $z_1 = \sqrt{2}(\cos(7\pi/12) + i\sin(7\pi/12))$.

— Pour $k = 2$: $z_2 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{12}+\pi)} = \sqrt{2}e^{i13\pi/12}$.
Forme trigonométrique : $z_2 = \sqrt{2}(\cos(13\pi/12) + i\sin(13\pi/12))$.

— Pour $k = 3$: $z_3 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{2})} = \sqrt{2}e^{i19\pi/12}$.
Forme trigonométrique : $z_3 = \sqrt{2}(\cos(19\pi/12) + i\sin(19\pi/12))$.

Étape 3 : Formes cartésiennes des racines 4-èmes

Pour trouver la forme cartésienne, nous calculons les racines carrées des racines carrées de w.

— **Racines carrées de $w = 2e^{i\pi/3}$:** Les racines carrées de w sont $\delta = \pm\sqrt{2}e^{i\pi/6}$.

$$\delta_1 = \sqrt{2}(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\delta_2 = -\delta_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

— **Racines carrées de δ_1 :** Cherchons $z = x + iy$ tel que $z^2 = \delta_1$. On a le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(\delta_1) = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 2xy = \mathrm{Im}(\delta_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x^2 + y^2 = |\delta_1| = \sqrt{(\frac{\sqrt{6}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{2} \end{cases}$$

En additionnant la première et la troisième ligne : $2x^2 = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} \implies x^2 = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. En soustrayant la première de la troisième : $2y^2 = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} \implies y^2 = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$. (Note : $2\sqrt{2} \approx 2.828$ et $\sqrt{6} \approx 2.449$, donc $2\sqrt{2} - \sqrt{6} > 0$). Comme $2xy > 0$, x et y sont de même signe. Les deux racines carrées de δ_1 sont :

$$z_0 = \frac{\sqrt{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}}{2} + i\frac{\sqrt{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = -z_0$$

— **Racines carrées de δ_2 :** Les racines carrées de $\delta_2 = -\delta_1$ sont $\pm iz_0$.

$$z_1 = iz_0 = -\frac{\sqrt{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}}{2} + i\frac{\sqrt{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}}{2} \quad \text{et} \quad z_3 = -z_1$$

Les quatre racines 4-èmes de w sous forme cartésienne sont donc z_0, z_1, z_2, z_3.

2. **Déduction de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$**

Nous identifions la forme trigonométrique et la forme cartésienne de la même racine, z_0.

$$z_0 = \sqrt{2}(\cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12)) = \frac{\sqrt{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}}{2} + i\frac{\sqrt{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}}{2}$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire :

$$\sqrt{2}\cos(\pi/12) = \frac{\sqrt{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}}{2} \quad \text{et} \quad \sqrt{2}\sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}}{2}$$

Simplifions les expressions avec des racines imbriquées. On utilise l'astuce $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$ ou on factorise. Pour la partie réelle :

$$\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \sqrt{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})} = \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

On sait que $2+\sqrt{3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}$. Donc $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$. Ainsi, $\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = 2^{1/4} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2^{1/2}} = 2^{-1/4}(\sqrt{3}+1)$. En substituant dans l'équation pour le cosinus :

$$\sqrt{2}\cos(\pi/12) = \frac{2^{-1/4}(\sqrt{3}+1)}{2} \implies \cos(\pi/12) = \frac{2^{-1/4}(\sqrt{3}+1)}{2 \cdot 2^{1/4}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos(\pi/12) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

De même pour la partie imaginaire :

$$\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = 2^{-1/4}(\sqrt{3}-1)$$

En substituant dans l'équation pour le sinus :

$$\sqrt{2}\sin(\pi/12) = \frac{2^{-1/4}(\sqrt{3}-1)}{2} \implies \sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

1 Exercices d'approfondissement

Exercice 3

Exercice 23 Soient $z_1 = 3\sqrt{2}(1+i)$, $z_2 = \sqrt{3}+i$.

1. Déterminer les formes exponentielle et trigonométrique de z_1 et z_2.
2. Déterminer la forme cartésienne de $z = \frac{z_1}{z_2^2}$.
3. Déterminer les formes exponentielle et trigonométrique de z.
4. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Solution

1. Pour $z_1 = 3\sqrt{2}(1+i) = 3\sqrt{2}+i3\sqrt{2}$. $|z_1| = \sqrt{(3\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2} = \sqrt{18+18} = 6$. $z_1 = 6(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$. $\arg(z_1) = \pi/4$. $z_1 = 6e^{i\pi/4} = 6(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4))$. Pour $z_2 = \sqrt{3}+i$. $|z_2| = \sqrt{3+1} = 2$. $z_2 = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})$. $\arg(z_2) = \pi/6$. $z_2 = 2e^{i\pi/6} = 2(\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6))$.
2. $z_2^2 = (\sqrt{3}+i)^2 = 3-1+2i\sqrt{3} = 2+2i\sqrt{3}$. $z = \frac{3\sqrt{2}(1+i)}{2+2i\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}(1+i)}{2(1+i\sqrt{3})} =$

$\frac{3\sqrt{2}(1+i)(1-i\sqrt{3})}{2(1+3)} = \frac{3\sqrt{2}}{8}(1 - i\sqrt{3} + i + \sqrt{3})$. $z = \frac{3\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{8} + i\frac{3\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{8}$.

3. En utilisant les formes exponentielles : $z = \frac{6e^{i\pi/4}}{(2e^{i\pi/6})^2} = \frac{6e^{i\pi/4}}{4e^{i2\pi/6}} = \frac{3}{2}e^{i(\pi/4-\pi/3)} = \frac{3}{2}e^{-i\pi/12}$. Forme trigonométrique : $\frac{3}{2}(\cos(-\pi/12) + i\sin(-\pi/12))$.
4. On identifie les formes cartésienne et trigonométrique de z. $\frac{3}{2}(\cos(-\pi/12) + i\sin(-\pi/12)) = \frac{3}{2}(\cos(\pi/12) - i\sin(\pi/12))$. $\frac{3}{2}\cos(\pi/12) = \frac{3\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{8} \implies \cos(\pi/12) = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. $-\frac{3}{2}\sin(\pi/12) = \frac{3\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{8} \implies \sin(\pi/12) = -\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 4

Exercice 24. Pour tout entier $n \geq 1$, déterminer les racines n-ièmes des nombres suivants : $i^{n/2}$, $2^n e^{i(2n+3)\pi}$.

Solution

— Pour $w_1 = i^{n/2} = (e^{i\pi/2})^{n/2} = e^{in\pi/4}$. On cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = w_1$. Les racines n-ièmes sont de la forme $z_k = |w_1|^{1/n} e^{i(\arg(w_1)+2k\pi)/n}$ pour $k = 0, \ldots, n-1$. Ici, $|w_1| = 1$ et $\arg(w_1) = n\pi/4$.

$$z_k = 1^{1/n} e^{i(n\pi/4+2k\pi)/n} = e^{i(\pi/4+2k\pi/n)}$$

— Pour $w_2 = 2^n e^{i(2n+3)\pi}$. L'argument est $(2n+3)\pi = 2n\pi + 3\pi \equiv \pi \pmod{2\pi}$. Donc $w_2 = 2^n e^{i\pi} = -2^n$. On cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = -2^n$. Le module est $|w_2| = 2^n$ et l'argument est π. Les racines n-ièmes sont :

$$z_k = (2^n)^{1/n} e^{i(\pi+2k\pi)/n} = 2e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}} \quad \text{pour } k = 0, \ldots, n-1$$

Exercice 5

Exercice 26. On considère le nombre complexe : $\mu = \frac{\sqrt{5}-1+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

1. Montrer que $\mu = e^{i2\pi/5}$.
2. Écrire sous forme cartésienne $z = e^{i\pi/3}$.
3. Écrire μ/z sous forme trigonométrique, exponentielle et cartésienne.
4. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{15}$ et de $\sin\frac{\pi}{15}$.

Solution

1. On considère le nombre complexe :

$$\mu = \frac{\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

Nous voulons démontrer que $\mu = e^{i2\pi/5}$ sans utiliser la connaissance préalable des valeurs de $\cos(2\pi/5)$ et $\sin(2\pi/5)$.
On commence par démontrer que μ est une **racine 5-ième primitive de l'unité**. Cela nécessite deux conditions :

1. $\mu^5 = 1$
2. $\mu \neq 1$

—

Étape 1 : Vérification de $\mu \neq 1$

$$\mu = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Comme $\sqrt{10+2\sqrt{5}} > 0$, la partie imaginaire $\text{Im}(\mu)$ est non nulle. Donc, $\mu \neq 1$.

—

Étape 2 : Vérification de $\mu^5 = 1$

Si $\mu \neq 1$ et $\mu^5 = 1$, alors μ doit satisfaire $\mu^5 - 1 = 0$, c'est-à-dire :

$$(\mu - 1)(\mu^4 + \mu^3 + \mu^2 + \mu + 1) = 0$$

Puisque $\mu \neq 1$, il suffit de démontrer que :

$$\mu^4 + \mu^3 + \mu^2 + \mu + 1 = 0$$

Calculer directement μ^2, μ^3, μ^4 serait très compliqué. Nous utilisons une méthode plus astucieuse.

2a. Vérification du module de μ

D'abord, calculons le carré du module de μ :

$$|\mu|^2 = (\text{Re}(\mu))^2 + (\text{Im}(\mu))^2$$

$$|\mu|^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2$$

$$|\mu|^2 = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16} + \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$$

$$|\mu|^2 = \frac{(5-2\sqrt{5}+1)+(10+2\sqrt{5})}{16}$$

$$|\mu|^2 = \frac{6-2\sqrt{5}+10+2\sqrt{5}}{16}$$

$$|\mu|^2 = \frac{16}{16} = 1$$

Comme $|\mu|^2 = 1$ et $|\mu| \geq 0$, on obtient $|\mu| = 1$.

2b. Transformation de l'équation

Puisque $|\mu| = 1$ (et donc $\mu \neq 0$), on peut diviser les deux côtés de l'équation $\mu^4 + \mu^3 + \mu^2 + \mu + 1 = 0$ par μ^2 :

$$\mu^2 + \mu + 1 + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} = 0$$

$$\left(\mu^2 + \frac{1}{\mu^2}\right) + \left(\mu + \frac{1}{\mu}\right) + 1 = 0$$

Puisque $|\mu| = 1$, on sait que $\mu \cdot \bar{\mu} = |\mu|^2 = 1$, donc $\frac{1}{\mu} = \bar{\mu}$.

— $\mu + \frac{1}{\mu} = \mu + \bar{\mu} = 2\,\mathrm{Re}(\mu)$

— $\mu^2 + \frac{1}{\mu^2} = \left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)^2 - 2 = (2\,\mathrm{Re}(\mu))^2 - 2$

Posons $x = 2\,\mathrm{Re}(\mu)$. L'équation $\left(\mu^2 + \frac{1}{\mu^2}\right) + \left(\mu + \frac{1}{\mu}\right) + 1 = 0$ devient :

$$(x^2 - 2) + x + 1 = 0$$

$$\mathbf{x^2 + x - 1 = 0}$$

2c. Vérification que μ satisfait cette équation

Il nous suffit maintenant de vérifier si $x = 2\,\mathrm{Re}(\mu)$ est solution de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

D'après la définition de μ :

$$x = 2\,\mathrm{Re}(\mu) = 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

En substituant $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ dans $x^2 + x - 1$:

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) - 1$$

$$= \left(\frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) - 1$$

$$= \left(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}\right) + \left(\frac{2(\sqrt{5}-1)}{4}\right) - \frac{4}{4}$$

$$= \frac{(6 - 2\sqrt{5}) + (2\sqrt{5} - 2) - 4}{4}$$

$$= \frac{6 - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 2 - 4}{4}$$

$$= \frac{6 - 2 - 4}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

Le résultat est 0. Cela prouve que $x = 2\,\mathrm{Re}(\mu)$ satisfait $x^2 + x - 1 = 0$, et par conséquent, μ satisfait $\mu^4 + \mu^3 + \mu^2 + \mu + 1 = 0$.

—

Étape 3 : Conclusion

Nous avons démontré que :

1. $\mu \neq 1$
2. $\mu^5 = 1$

Donc, μ est une **racine 5-ième primitive de l'unité**.

Il y a 4 racines 5-ièmes primitives de l'unité : $e^{i2\pi/5}, e^{i4\pi/5}, e^{i6\pi/5}, e^{i8\pi/5}$.

Nous observons les signes de μ :

— $\mathrm{Re}(\mu) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} > 0$ (partie réelle positive)

— $\mathrm{Im}(\mu) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} > 0$ (partie imaginaire positive)

μ est situé dans le **premier quadrant** du plan complexe.

Parmi les 4 racines primitives :

— $e^{i2\pi/5}$: 1er quadrant $(\cos > 0, \sin > 0)$
— $e^{i4\pi/5}$: 2ème quadrant $(\cos < 0, \sin > 0)$
— $e^{i6\pi/5}$: 3ème quadrant $(\cos < 0, \sin < 0)$
— $e^{i8\pi/5}$: 4ème quadrant $(\cos > 0, \sin < 0)$
La seule racine 5-ième primitive de l'unité située dans le premier quadrant est $e^{i2\pi/5}$. Par conséquent, $\mu = e^{i2\pi/5}$.

2. $z = e^{i\pi/3} = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. **Forme exponentielle :** $\frac{\mu}{z} = \frac{e^{i2\pi/5}}{e^{i\pi/3}} = e^{i(2\pi/5-\pi/3)} = e^{i(6\pi-5\pi)/15} = e^{i\pi/15}$. **Forme trigonométrique :** $\cos(\pi/15) + i\sin(\pi/15)$. **Forme cartésienne :**

$$\frac{\mu}{z} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = \frac{(\sqrt{5}-1+i\sqrt{10+2\sqrt{5}})(1-i\sqrt{3})}{2(1+3)}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-1)+\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+i(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1))}{8}$$

4. En identifiant les parties réelle et imaginaire :

$$\cos(\pi/15) = \frac{\sqrt{5}-1+\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{8}$$

$$\sin(\pi/15) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}}{8}$$

Exercice 6

Exercice 28.

1. Donner une racine 6-ème primitive de l'unité sous formes cartésienne et exponentielle.
2. Vérifier que $2+i$ est une racine 6-ème de $w = -117+44i$.
3. Déterminer les formes exponentielle et cartésienne de toutes les racines 6-èmes de w.
4. Dessiner les racines 6-èmes de w dans le plan cartésien, et décrire la figure obtenue.

Solution

1. Les racines 6-èmes de l'unité sont $u_k = e^{i2k\pi/6} = e^{ik\pi/3}$ pour $k \in \{0, \dots, 5\}$. Une racine est primitive si $\text{pgcd}(k, 6) = 1$. C'est le cas pour $k = 1$ et $k = 5$. Pour $k = 1$, on a $u_1 = e^{i\pi/3}$. Forme exponentielle : $e^{i\pi/3}$. Forme cartésienne : $\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. On calcule $(2+i)^6$. $(2+i)^2 = 3+4i$. $(2+i)^3 = (3+4i)(2+i) = 6+3i+8i-4 = 2+11i$. $(2+i)^6 = ((2+i)^3)^2 = (2+11i)^2 = 4+44i-121 = -117+44i$. C'est vérifié.

3. Soit $z_0 = 2+i$. Les autres racines 6-èmes de w sont $z_k = z_0 \cdot u_k$ pour $k \in \{0, \dots, 5\}$. En général, pour trouver toutes les racines n-ièmes d'un nombre complexe w, on

cherche tous les nombres complexes z tels que $z^n = w$.

1. On suppose qu'on a déjà trouvé une racine particulière, z_0. On a donc $z_0^n = w$.
2. Les racines n-ièmes de l'unité, que l'on note u_k (pour $k = 0, \dots, n-1$), sont toutes les solutions de l'équation $u^n = 1$.
3. Si l'on définit un nouveau nombre z_k en posant $z_k = z_0 \cdot u_k$, on peut calculer sa puissance n-ième :

$$(z_k)^n = (z_0 \cdot u_k)^n = (z_0)^n \cdot (u_k)^n$$

4. En utilisant les égalités des points 1 et 2, on peut remplacer les termes dans l'équation :

$$(z_k)^n = (w) \cdot (1) = w$$

Ceci prouve que n'importe quel z_k (formé en multipliant la racine z_0 par une racine de l'unité u_k) est aussi une racine n-ième de w.
Puisqu'il y a n racines de l'unité u_k distinctes, leur multiplication par z_0 permet de générer les n racines distinctes de w.

— $z_0 = 2 + i$.
— $z_1 = (2+i)(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{2-\sqrt{3}}{2} + i\frac{2\sqrt{3}+1}{2}$.
— $z_2 = (2+i)(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{-2-\sqrt{3}}{2} + i\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$.
— $z_3 = (2+i)(-1) = -2 - i$.
— $z_4 = (2+i)(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{-2+\sqrt{3}}{2} - i\frac{2\sqrt{3}+1}{2}$.
— $z_5 = (2+i)(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{2+\sqrt{3}}{2} - i\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$.

Pour la forme exponentielle, $|z_0| = \sqrt{5}$ et $\arg(z_0) = \arctan(1/2)$. Soit $\phi = \arctan(1/2)$. $z_k = \sqrt{5}e^{i\phi} \cdot e^{ik\pi/3} = \sqrt{5}e^{i(\phi + k\pi/3)}$.

4. Les points A_k d'affixes z_k sont les sommets d'un hexagone régulier centré à l'origine O, inscrit dans le cercle de rayon $R = \sqrt{5}$. **L'un des sommets de cet hexagone est le point A_0 d'affixe $z_0 = 2 + i$.**
L'argument de ce sommet, $\theta_0 = \arg(z_0) = \arctan(1/2)$, fixe l'orientation de l'hexagone. Les autres sommets A_k s'en déduisent par des rotations successives de A_0 autour de l'origine, d'angle $\pi/3$ (ou 60°).

Exercice 7

Exercice 29. L'objectif est d'écrire au moyen de racines carrées de nombres réels les nombres $\cos\frac{\pi}{5}, \sin\frac{\pi}{5}, \cos\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{\pi}{10}$.

Solution

Soit $z = e^{i\theta}$ une racine 5-ème de l'unité, $z^5 = 1$, avec $\theta \neq 2k\pi$. L'équation $z^5 - 1 = 0$ implique $(z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4) = 0$. Comme $z \neq 1$, on a $1+z+z^2+z^3+z^4 = 0$. On divise par z^2 (qui est non nul) : $z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + z^2 = 0$. En regroupant les termes : $(z^2 + z^{-2}) + (z + z^{-1}) + 1 = 0$. En utilisant les formules d'Euler, $z^k + z^{-k} = 2\cos(k\theta)$. L'équation devient $2\cos(2\theta) + 2\cos(\theta) + 1 = 0$. Avec la formule $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$, on a : $2(2\cos^2(\theta) - 1) + 2\cos(\theta) + 1 = 0 \implies 4\cos^2(\theta) + 2\cos(\theta) - 1 = 0$. C'est une équation du second degré en $\cos(\theta)$. Les solutions sont $\cos(\theta) = \frac{-2\pm\sqrt{4-4(4)(-1)}}{8} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. Pour $\theta = 2\pi/5$ (Q1), $\cos(2\pi/5) > 0$, donc $\cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Pour $\theta = 4\pi/5$ (Q2), $\cos(4\pi/5) < 0$, donc $\cos(4\pi/5) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. On a $\cos(4\pi/5) = -\cos(\pi/5)$, donc $\cos(\pi/5) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. On en déduit les sinus (positifs car les angles sont dans $[0, \pi]$) : $\sin^2(\pi/5) = 1 - \cos^2(\pi/5) = 1 - (\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2 = 1 - \frac{1+2\sqrt{5}+5}{16} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$. $\sin(\pi/5) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$. Avec les formules de l'angle moitié : $\cos^2(\pi/10) = \frac{1+\cos(\pi/5)}{2} = \frac{1+(1+\sqrt{5})/4}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$. $\cos(\pi/10) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. $\sin^2(\pi/10) = \frac{1-\cos(\pi/5)}{2} = \frac{1-(1+\sqrt{5})/4}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$. $\sin(\pi/10) = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Exercice 8

Exercice 32.

1. Déterminer les formes trigonométriques et exponentielles des racines 5-èmes de l'unité.
2. Dessiner de façon approximative les racines 5-èmes de l'unité dans le plan cartésien.
3. Soit $z = x+iy$ une racine 5-ème de l'unité. Trouver les valeurs possibles pour y/x.
4. En déduire les valeurs de $\tan\frac{\pi}{5}$ et $\tan\frac{\pi}{10}$.
5. En utilisant le fait que $x^2 + y^2 = 1$, déterminer les formes cartésiennes des racines 5-èmes de l'unité.
6. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{5}, \sin\frac{\pi}{5}, \cos\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{\pi}{10}$.

Solution

Cet exercice est très similaire à l'exercice 29. Les résultats sont dérivés de la même manière.

1. Les racines 5-èmes de l'unité sont $u_k = e^{i2k\pi/5} = \cos(2k\pi/5) + i\sin(2k\pi/5)$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
2. Les points forment un pentagone régulier inscrit dans le cercle unité.
3. $y/x = \tan(\arg(z))$. Les arguments sont $0, 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$. Les valeurs possibles de tan sont $0, \pm\tan(\pi/5), \pm\tan(2\pi/5)$.
4. L'équation $5-10\tan^2\theta+\tan^4\theta = 0$ (ou $t^4-10t^2+5 = 0$ en posant $t = \tan\theta$) est obtenue en résolvant $\sin(5\theta) = 0$ et en l'exprimant comme un polynôme en $\tan\theta$.

   Voici la dérivation étape par étape :

   Idée centrale Les angles θ que nous recherchons (comme $\pi/5$, $2\pi/5$, etc.) satisfont la condition que 5θ est un multiple de π. Par conséquent, $\sin(5\theta) = 0$.

   Étape 1 : Formule de Moivre Nous savons qu'une racine 5-ième de l'unité $z = e^{i\theta}$ satisfait $z^5 = 1$. D'après la formule de Moivre :

   $$z^5 = (\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos(5\theta) + i\sin(5\theta)$$

Puisque $z^5 = 1 + 0i$, nous devons avoir la partie imaginaire nulle :

$$\sin(5\theta) = 0$$

Étape 2 : Développement binomial Nous utilisons la formule du binôme de Newton pour développer $(\cos\theta + i\sin\theta)^5$. Posons $a = \cos\theta$ et $b = i\sin\theta$.

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

La partie imaginaire de ce développement est $\sin(5\theta)$. Elle correspond aux termes où i a une puissance impaire (b, b^3, b^5) :

$$\text{Im}(z^5) = \text{Im}(5a^4b + 10a^2b^3 + b^5)$$

$$\text{Im}(z^5) = \text{Im}(5(\cos^4\theta)(i\sin\theta) + 10(\cos^2\theta)(i\sin\theta)^3 + (i\sin\theta)^5)$$
$$\text{Im}(z^5) = \text{Im}(5i\cos^4\theta\sin\theta + 10i^3\cos^2\theta\sin^3\theta + i^5\sin^5\theta)$$

Puisque $i^3 = -i$ et $i^5 = i$, nous obtenons :

$$\text{Im}(z^5) = \text{Im}(i(5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta))$$

Donc :
$$\sin(5\theta) = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta$$

Étape 3 : Conversion en équation en $\tan\theta$
Nous posons $\sin(5\theta) = 0$:

$$5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta = 0$$

Les solutions que nous cherchons ($\theta = \pi/5, 2\pi/5, \dots$) ne sont pas $\pi/2$ ou $3\pi/2$. Par conséquent, $\cos\theta \neq 0$. Nous pouvons diviser l'équation entière par $\cos^5\theta$ (qui est non nul) :

$$\frac{5\cos^4\theta\sin\theta}{\cos^5\theta} - \frac{10\cos^2\theta\sin^3\theta}{\cos^5\theta} + \frac{\sin^5\theta}{\cos^5\theta} = 0$$
$$5\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) - 10\left(\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}\right) + \left(\frac{\sin^5\theta}{\cos^5\theta}\right) = 0$$

Étape 4 : Résolution
Posons $t = \tan\theta$. L'équation devient :

$$5t - 10t^3 + t^5 = 0$$

Nous pouvons factoriser par t :

$$t(t^4 - 10t^2 + 5) = 0$$

Les solutions de cette équation sont toutes les valeurs de $t = \tan\theta$ pour lesquelles $\sin(5\theta) = 0$ (c'est-à-dire $\theta = k\pi/5$).
— $t = 0$: Cette solution correspond à $\theta = 0, \pi, \dots$ (puisque $\tan(0) = 0$).

— $t^4-10t^2+5=0$: Les solutions de cette équation doivent être les tangentes de tous les autres angles, c'est-à-dire $\tan(\pi/5)$, $\tan(2\pi/5)$, $\tan(3\pi/5)$, et $\tan(4\pi/5)$.

En résolvant $5-10\tan^2\theta+\tan^4\theta=0$ (voir ex. 29), on trouve $\tan^2(\pi/5)=5-2\sqrt{5}$ et $\tan^2(2\pi/5)=5+2\sqrt{5}$. Donc $\tan(\pi/5)=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$. Pour $\tan(\pi/10)$, on utilise $\cos(\pi/5)=\frac{1-\tan^2(\pi/10)}{1+\tan^2(\pi/10)}$ et $\cos(\pi/5)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ pour trouver $\tan(\pi/10)=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}}$.

5. Les formes cartésiennes sont (voir ex. 29) : $u_0=1$, $u_1=\frac{\sqrt{5}-1}{4}+i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, $u_2=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}+i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $u_3=\bar{u_2}$, $u_4=\bar{u_1}$.
6. Par identification avec $u_2=\cos(4\pi/5)+i\sin(4\pi/5)=-\cos(\pi/5)+i\sin(\pi/5)$, on a : $\cos(\pi/5)=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\sin(\pi/5)=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$. Puis par les formules de l'angle moitié : $\cos(\pi/10)=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ et $\sin(\pi/10)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.