Corrigé du CC3 - Sujet B

Exercice 1 : (5 pt)
Soit le nombre complexe $z = -4\sqrt{3} + 4i$.

1. **Forme exponentielle de z (1.5 pt)**
   On calcule d'abord le module de z :
   $$|z| = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{16 \times 3 + 16} = \sqrt{48 + 16} = \sqrt{64} = 8.$$
   On met le module en facteur :
   $$z = 8\left(-\frac{4\sqrt{3}}{8} + i\frac{4}{8}\right) = 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right).$$
   On cherche un argument θ tel que $\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$. L'angle qui correspond est $\theta = \frac{5\pi}{6}$. La forme exponentielle de z est donc :
   $$z = 8e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

2. **Racines cubiques de z (1.5 pt)**
   On cherche les nombres complexes w tels que $w^3 = z = 8e^{i\frac{5\pi}{6}}$. On pose $w = re^{i\phi}$. L'équation devient $r^3e^{i3\phi} = 8e^{i\frac{5\pi}{6}}$. Par identification des modules et des arguments, on a :
   $$\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\phi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \implies \begin{cases} r = \sqrt{8} = 2 \\ \phi = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
   (Ou on peut etre plus precis) Les trois racines cubiques sont (pour $k = 0, 1, 2$) :
   — $w_0 = 2e^{i\frac{5\pi}{18}}$
   — $w_1 = 2e^{i(\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\frac{17\pi}{18}}$
   — $w_2 = 2e^{i(\frac{5\pi}{18} + \frac{4\pi}{3})} = 2e^{i\frac{29\pi}{18}}$

3. **(2 pt)** Omise. 0.5 + 1 + 0.5 (Représentation graphique)

Exercice 2 : (6 pt)

1. (1 pt) D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple $(Q(X), R(X))$ tel que $P(X) = (X-1)(X+2)Q(X) + R(X)$ avec $\deg(R(X)) < \deg((X-1)(X+2))$. Le degré du diviseur $(X-1)(X+2)$ est 2. Le degré du reste $R(X)$ est donc strictement inférieur à 2. Le degré maximal du reste est 1. La forme générale de $R(X)$ est donc :
   $$R(X) = aX + b, \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

2. (2 pt) Le reste de la division de $P(X)$ par $(X-1)$ est $P(1)$. On nous donne $P(1) = 5$. De même, le reste de la division de $P(X)$ par $(X+2)$ est $P(-2)$. On nous donne $P(-2) = -1$. En utilisant l'équation de la division euclidienne de la question 1 :

— $P(1) = (1-1)(1+2)Q(1) + R(1) = R(1) = a(1) + b = a + b.$
— $P(-2) = (-2-1)(-2+2)Q(-2) + R(-2) = R(-2) = a(-2) + b = -2a + b.$
On obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a + b = 5 \quad (L_1) \\ -2a + b = -1 \quad (L_2) \end{cases}$$

On soustrait (L_2) à (L_1) : $(a-(-2a))+(b-b) = 5-(-1) \implies 3a = 6 \implies a = 2.$ On remplace $a = 2$ dans (L_1) : $2 + b = 5 \implies b = 3$. Le reste de la division est donc :

$$R(X) = 2X + 3.$$

3. (3 pt) **Méthode 1 : Utilisation du reste et de la divisibilité**

D'après les questions 1 et 2, on sait que le reste de la division de $P(X)$ par $(X-1)(X+2)$ est $R(X) = 2X + 3$. On peut donc écrire $P(X) = K(X) \cdot (X-1)(X+2) + (2X+3)$, ce qui s'écrit :

$$P(X) = K(X) \cdot (X^2 + X - 2) + (2X + 3)$$

où $K(X)$ est un polynôme.

La question 3 impose $\deg(P) = 3$. Comme $\deg(X^2 + X - 2) = 2$, on en déduit que $\deg(K) = 1$. On pose $K(X) = cX + d$, avec $c, d \in \mathbb{R}$ (car $P \in \mathbb{R}[X]$).

$$P(X) = (cX + d)(X^2 + X - 2) + (2X + 3)$$

La question 3 impose aussi que $P(X)$ est divisible par $Q(X) = X^2 + X + 1$.

Réécrivons le diviseur $X^2 + X - 2$ en fonction de $Q(X)$: $X^2 + X - 2 = (X^2 + X + 1) - 3 = Q(X) - 3$.

En substituant dans l'expression de $P(X)$:

$$P(X) = (cX + d)(Q(X) - 3) + (2X + 3)$$

$$P(X) = (cX + d)Q(X) - 3(cX + d) + (2X + 3)$$

Pour que $P(X)$ soit divisible par $Q(X)$, il faut et il suffit que le reste de la division de $P(X)$ par $Q(X)$ soit nul. D'après l'expression ci-dessus, $P(X)$ est divisible par $Q(X)$ si et seulement si $R_2(X) = -3(cX + d) + (2X + 3)$ est lui-même divisible par $Q(X)$.

On a $\deg(Q) = 2$ et $\deg(R_2) \leq 1$. Un polynôme de degré 2 ne peut diviser un polynôme de degré au plus 1 que si ce dernier est le **polynôme nul**. On doit donc avoir $R_2(X) = 0$ pour tout X.

$$-3(cX + d) + (2X + 3) = 0$$

$$(-3c + 2)X + (-3d + 3) = 0$$

Par identification des coefficients, on obtient le système :

$$\begin{cases} 2 - 3c = 0 \\ 3 - 3d = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c = 2/3 \\ d = 1 \end{cases}$$

Le polynôme $K(X)$ est donc $K(X) = \frac{2}{3}X + 1$.

On en déduit l'unique polynôme $P(X)$:

$$P(X) = \left(\frac{2}{3}X + 1\right)(X^2 + X - 2) + (2X + 3)$$

$$P(X) = \left(\frac{2}{3}X^3 + \frac{2}{3}X^2 - \frac{4}{3}X + X^2 + X - 2\right) + (2X + 3)$$

$$P(X) = \frac{2}{3}X^3 + \left(\frac{2}{3} + 1\right)X^2 + \left(-\frac{4}{3} + 1 + 2\right)X + (-2 + 3)$$

$$P(X) = \frac{2}{3}X^3 + \frac{5}{3}X^2 + \frac{5}{3}X + 1$$

Méthode 2 : Utilisation de la divisibilité (plus directe)

La question 3 impose $\deg(P) = 3$ et $P(X)$ divisible par $Q(X) = X^2 + X + 1$ (degré 2). On peut donc écrire $P(X)$ directement sous la forme :

$$P(X) = (cX + d)Q(X) = (cX + d)(X^2 + X + 1)$$

où $c, d \in \mathbb{R}$ et $c \neq 0$.

On utilise maintenant les conditions des questions 1 et 2 :

(a) Le reste de la division par $(X - 1)$ est $P(1) = 5$.

(b) Le reste de la division par $(X + 2)$ est $P(-2) = -1$.

Calculons $Q(1)$ et $Q(-2)$:

— $Q(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$

— $Q(-2) = (-2)^2 - 2 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$

On injecte cela dans nos conditions :

(a) $P(1) = (c(1) + d)Q(1) = (c + d) \cdot 3 = 5 \implies c + d = \frac{5}{3}$

(b) $P(-2) = (c(-2) + d)Q(-2) = (-2c + d) \cdot 3 = -1 \implies -2c + d = -\frac{1}{3}$

On résout le système :

$$\begin{cases} c + d = 5/3 \quad (L_1) \\ -2c + d = -1/3 \quad (L_2) \end{cases}$$

En soustrayant (L_2) à (L_1) : $(c - (-2c)) + (d - d) = (5/3 - (-1/3)) \implies 3c = 6/3 = 2 \implies \mathbf{c = 2/3}$.

En remplaçant $c = 2/3$ dans (L_1) : $2/3 + d = 5/3 \implies d = 3/3 \implies \mathbf{d = 1}$.

On retrouve bien $c = 2/3$ et $d = 1$. Le polynôme est donc :

$$P(X) = \left(\frac{2}{3}X + 1\right)(X^2 + X + 1)$$

En développant :

$$P(X) = \frac{2}{3}X(X^2 + X + 1) + 1(X^2 + X + 1)$$

$$P(X) = \left(\frac{2}{3}X^3 + \frac{2}{3}X^2 + \frac{2}{3}X\right) + (X^2 + X + 1)$$

$$P(X) = \frac{2}{3}X^3 + \frac{5}{3}X^2 + \frac{5}{3}X + 1$$

Exercice 3 :
Soit $P(X) = X^5 - X^4 + 2X^3 - X^2 + X$ et $A(X) = X^3 - 2X^2 + 2X - 1$.

1. **(2 pt) Racines et facteur irréductible**
   Vérification pour i :

$$P(i) = i^5 - i^4 + 2i^3 - i^2 + i = i - 1 - 2i + 1 + i = 0$$

   Donc i est racine de $P(X)$.
   Autre racine complexe : $-i$ (le conjugué).
   Facteur irréductible de degré 2 : $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$.

2. **(3 pt) Décomposition en facteurs irréductibles**
   Dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X) = X(X^4 - X^3 + 2X^2 - X + 1)$$

   On divise par $(X^2 + 1)$:

$$X^4 - X^3 + 2X^2 - X + 1 = (X^2 + 1)(X^2 - X + 1)$$

   Le discriminant de $X^2 - X + 1$ est $\Delta = -3$. Irréductible dans $\mathbb{R}$.

$$P(X) = X(X^2 + 1)(X^2 - X + 1)$$

   Dans $\mathbb{C}[X]$: Les racines de $X^2 - X + 1$ sont $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

$$P(X) = X(X - i)(X + i)\left(X - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$$

3. **(2 pt) PGCD unitaire de A et P**
   Pour $A(X) = X^3 - 2X^2 + 2X - 1$, on observe que $1 - 2 + 2 - 1 = 0$, donc 1 est racine.

$$A(X) = (X - 1)(X^2 - X + 1)$$

   Comparaison avec $P(X) = X(X^2 + 1)(X^2 - X + 1)$. Le facteur commun est :

$$\mathrm{PGCD}(A, P) = X^2 - X + 1$$

4. **(2 pt) Décomposition en éléments simples**
   Soit $F(X) = \frac{A(X)}{P(X)}$. Simplification par le PGCD :

$$F(X) = \frac{(X - 1)(X^2 - X + 1)}{X(X^2 + 1)(X^2 - X + 1)} = \frac{X - 1}{X(X^2 + 1)}$$

   Forme : $F(X) = \frac{a}{X} + \frac{bX + c}{X^2 + 1}$.
   — $a = \left[\frac{X-1}{X^2+1}\right]_{X=0} = \frac{-1}{1} = -1$.
   — Identification : $\frac{-1}{X} + \frac{bX+c}{X^2+1} = \frac{-(X^2+1)+X(bX+c)}{X(X^2+1)} = \frac{(b-1)X^2+cX-1}{X(X^2+1)}$.
   — On identifie avec $X - 1$: $b - 1 = 0 \implies b = 1$ et $c = 1$.

$$F(X) = -\frac{1}{X} + \frac{X + 1}{X^2 + 1}$$