Corrigé du CC3 - Sujet A

Exercice 1 : (5 pt)
Soit le nombre complexe $z = -3 + 3i\sqrt{3}$.

1. **Forme exponentielle de z (1.5 pt)**
   On calcule d'abord le module de z :
   $$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 9 \times 3} = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36} = 6.$$
   On met le module en facteur :
   $$z = 6\left(-\frac{3}{6} + i\frac{3\sqrt{3}}{6}\right) = 6\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$
   On cherche un argument θ tel que $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. L'angle qui correspond est $\theta = \frac{2\pi}{3}$. La forme exponentielle de z est donc :
   $$z = 6e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$
2. **Racines cubiques de z (1.5 pt)**
   On cherche les nombres complexes w tels que $w^3 = z = 6e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On pose $w = re^{i\phi}$. L'équation devient $r^3e^{i3\phi} = 6e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Par identification des modules et des arguments, on a :
   $$\begin{cases} r^3 = 6 \\ 3\phi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \implies \begin{cases} r = \sqrt[3]{6} \\ \phi = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
   (Ou on peut etre plus precis) Les trois racines cubiques sont (pour $k = 0, 1, 2$) :
   — $w_0 = \sqrt[3]{6}e^{i\frac{2\pi}{9}}$
   — $w_1 = \sqrt[3]{6}e^{i(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3})} = \sqrt[3]{6}e^{i\frac{8\pi}{9}}$
   — $w_2 = \sqrt[3]{6}e^{i(\frac{2\pi}{9}+\frac{4\pi}{3})} = \sqrt[3]{6}e^{i\frac{14\pi}{9}}$
3. **(2 pt)** Omise. 0.5 + 1 + 0.5 (Représentation graphique)

Exercice 2 : (6 pt)

1. (1 pt) D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple $(Q(X), R(X))$ tel que $P(X) = (X-2)(X+1)Q(X) + R(X)$ avec $\deg(R(X)) < \deg((X-2)(X+1))$. Le degré du diviseur $(X-2)(X+1)$ est 2. Le degré du reste $R(X)$ est donc strictly inférieur à 2. Le degré maximal du reste est 1. La forme générale de $R(X)$ est donc :
   $$R(X) = aX + b, \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$
2. (2 pt) Le reste de la division de $P(X)$ par $(X-2)$ est $P(2)$. On nous donne $P(2) = 7$. De même, le reste de la division de $P(X)$ par $(X+1)$ est $P(-1)$. On nous donne $P(-1) = -2$. En utilisant l'équation de la division euclidienne de la question 1 :

— $P(2) = (2-2)(2+1)Q(2) + R(2) = R(2) = a(2) + b = 2a + b$.
— $P(-1) = (-1-2)(-1+1)Q(-1) + R(-1) = R(-1) = a(-1) + b = -a + b$.
On obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2a + b = 7 \quad (L_1) \\ -a + b = -2 \quad (L_2) \end{cases}$$

On soustrait (L_2) à (L_1) : $(2a-(-a))+(b-b) = 7-(-2) \implies 3a = 9 \implies a = 3$. On remplace $a = 3$ dans (L_2) : $-3+b = -2 \implies b = 1$. Le reste de la division est donc :

$$R(X) = 3X + 1.$$

3. (3 pt) **Méthode 1 : Utilisation du reste et de la divisibilité**

D'après les questions 1 et 2, on sait que $P(X) = K(X)\cdot(X-2)(X+1)+(3X+1)$, ce qui s'écrit :

$$P(X) = K(X) \cdot (X^2 - X - 2) + (3X + 1)$$

où $K(X)$ est un polynôme.

La question 3 impose $\deg(P) = 3$. Comme $\deg(X^2 - X - 2) = 2$, on en déduit que $\deg(K) = 1$. On pose $K(X) = cX + d$, avec $c, d \in \mathbb{R}$ (car $P \in \mathbb{R}[X]$).

$$P(X) = (cX + d)(X^2 - X - 2) + (3X + 1)$$

La question 3 impose aussi que $P(X)$ est divisible par $Q(X) = X^2 - X + 1$.

Réécrivons le diviseur $X^2 - X - 2$ en fonction de $Q(X)$: $X^2 - X - 2 = (X^2 - X + 1) - 3 = Q(X) - 3$.

En substituant dans l'expression de $P(X)$:

$$P(X) = (cX + d)(Q(X) - 3) + (3X + 1)$$

$$P(X) = (cX + d)Q(X) - 3(cX + d) + (3X + 1)$$

Pour que $P(X)$ soit divisible par $Q(X)$, il faut et il suffit que le reste de la division de $P(X)$ par $Q(X)$ soit nul. D'après l'expression ci-dessus, $P(X)$ est divisible par $Q(X)$ si et seulement si $R_2(X) = -3(cX + d) + (3X + 1)$ est lui-même divisible par $Q(X)$.

On a $\deg(Q) = 2$ et $\deg(R_2) \leq 1$. Un polynôme de degré 2 ne peut diviser un polynôme de degré au plus 1 que si ce dernier est le polynôme nul ($\deg AB = \deg A + \deg B$). On doit donc avoir $R_2(X) = 0$ pour tout X.

$$-3(cX + d) + (3X + 1) = 0$$

$$(-3c + 3)X + (-3d + 1) = 0$$

Par identification des coefficients, on obtient le système :

$$\begin{cases} 3 - 3c = 0 \\ 1 - 3d = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c = 1 \\ d = 1/3 \end{cases}$$

Le polynôme $K(X)$ est donc $K(X) = X + \frac{1}{3}$.

On en déduit l'unique polynôme $P(X)$:

$$P(X) = \left(X + \frac{1}{3}\right)(X^2 - X - 2) + (3X + 1)$$

$$P(X) = \left(X^3 - X^2 - 2X + \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{2}{3}\right) + (3X + 1)$$

$$P(X) = X^3 - \frac{2}{3}X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}$$

Méthode 2 : Utilisation de la divisibilité (plus directe)

La question 3 impose $\deg(P) = 3$ et $P(X)$ divisible par $Q(X) = X^2 - X + 1$ (degré 2). On peut donc écrire $P(X)$ directement sous la forme :

$$P(X) = (cX + d)Q(X) = (cX + d)(X^2 - X + 1)$$

où $c, d \in \mathbb{R}$ et $c \neq 0$.

On utilise maintenant les conditions des questions 1 et 2 :

(a) Le reste de la division par $(X - 2)$ est $P(2) = 7$.

(b) Le reste de la division par $(X + 1)$ est $P(-1) = -2$.

Calculons $Q(2)$ et $Q(-1)$:

— $Q(2) = 2^2 - 2 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$

— $Q(-1) = (-1)^2 - (-1) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$

On injecte cela dans nos conditions :

(a) $P(2) = (c(2) + d)Q(2) = (2c + d) \cdot 3 = 7 \implies 2c + d = \frac{7}{3}$

(b) $P(-1) = (c(-1) + d)Q(-1) = (-c + d) \cdot 3 = -2 \implies -c + d = -\frac{2}{3}$

On résout le système :

$$\begin{cases} 2c + d = 7/3 & (L_1) \\ -c + d = -2/3 & (L_2) \end{cases}$$

En soustrayant (L_2) à (L_1) : $(2c - (-c)) + (d - d) = (7/3 - (-2/3)) \implies 3c = 9/3 = 3 \implies \mathbf{c = 1}$.

En remplaçant $c = 1$ dans (L_2) : $-1 + d = -2/3 \implies d = 1 - 2/3 \implies \mathbf{d = 1/3}$.

On retrouve bien $c = 1$ et $d = 1/3$. Le polynôme est donc :

$$P(X) = \left(X + \frac{1}{3}\right)(X^2 - X + 1)$$

En développant :

$$P(X) = X(X^2 - X + 1) + \frac{1}{3}(X^2 - X + 1)$$

$$P(X) = (X^3 - X^2 + X) + (\frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X + \frac{1}{3})$$

$$P(X) = X^3 - \frac{2}{3}X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}$$

Exercice 3 :
Soit $P(X) = X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 2X^2 + 2X$ et $A(X) = X^3 - X^2 + 2$.

1. **(2 pt) Racines et facteur irréductible**
   Vérification pour i :

   $$P(i) = i^5 - 2i^4 + 3i^3 - 2i^2 + 2i = i - 2(1) + 3(-i) - 2(-1) + 2i = i - 2 - 3i + 2 + 2i = 0$$

   Donc i est racine de $P(X)$.
   Autre racine complexe : $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, donc si i est racine, son conjugué $\bar{i} = -i$ est aussi racine.
   Facteur irréductible de degré 2 : $P(X)$ est divisible par $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$. Ce polynôme est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
2. **(3 pt) Décomposition en facteurs irréductibles**
   Dans $\mathbb{R}[X]$: On remarque que X est un facteur évident.

   $$P(X) = X(X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 2)$$

   On effectue la division euclidienne de $(X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 2)$ par $(X^2 + 1)$:

   $$X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 2 = (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2)$$

   Pour $X^2 - 2X + 2$, le discriminant est $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$. Il est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

   $$P(X) = X(X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2)$$

   Dans $\mathbb{C}[X]$: Les racines de $X^2 - 2X + 2$ sont $1 + i$ et $1 - i$.

   $$P(X) = X(X - i)(X + i)(X - (1 + i))(X - (1 - i))$$

3. **(2 pt) PGCD unitaire de A et P**
   On cherche les racines de $A(X) = X^3 - X^2 + 2$. $A(-1) = -1 - 1 + 2 = 0$, donc -1 est racine. Par division euclidienne : $A(X) = (X + 1)(X^2 - 2X + 2)$.
   On compare les factorisations réelles :
   — $A(X) = (X + 1)(X^2 - 2X + 2)$
   — $P(X) = X(X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2)$
   Le PGCD est le facteur commun :

   $$\text{PGCD}(A, P) = X^2 - 2X + 2$$

4. **(2 pt) Décomposition en éléments simples**
   Soit $F(X) = \frac{A(X)}{P(X)}$. On simplifie par le PGCD :

   $$F(X) = \frac{(X + 1)(X^2 - 2X + 2)}{X(X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2)} = \frac{X + 1}{X(X^2 + 1)}$$

   Forme de la décomposition : $F(X) = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{X^2+1}$.
   — Pour a (multiplication par X, éval. en 0) : $a = \frac{1}{1} = 1$.
   — Identification : $\frac{1}{X} + \frac{bX+c}{X^2+1} = \frac{X^2+1+bX^2+cX}{X(X^2+1)} = \frac{(1+b)X^2+cX+1}{X(X^2+1)}$.
   — On identifie avec le numérateur $X + 1$: $1 + b = 0 \implies b = -1$ et $c = 1$.

   $$F(X) = \frac{1}{X} + \frac{-X + 1}{X^2 + 1}$$