Feuille d'exercices 4

Systèmes linéaires

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants :

$$(a)\ \begin{cases} x+2y-3z = -1 \\ 3x-y+2z = 7 \\ 8x+2y-2z = 9 \end{cases} \quad (b)\ \begin{cases} 2x+y-2z = 10 \\ x+y+4z = -9 \\ 7x+5y+z = 14 \end{cases} \quad (c)\ \begin{cases} x-3y+7z = -4 \\ x-2y-3z = 6 \\ 7x+4y-z = 22 \end{cases}$$

Exercice 2. Résoudre en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$(a)\ \begin{cases} x-3y-2z = -1 \\ 2x+y-4z = 3 \\ x+4y-2z = 4 \\ 5x+6y-10z = 10 \end{cases} \quad (b)\ \begin{cases} x+2y+3z-2t = 6 \\ 2x-y-2z-3t = 8 \\ 3x+2y-z+2t = 4 \\ 2x-3y+2z+t = -8 \end{cases} \quad (c)\ \begin{cases} x+2y-2z+3w = 2 \\ 2x+4y-3z+4w = 5 \\ 5x+10y-8z+11w = 12 \end{cases}.$$

Exercice 3. Déterminer les valeurs du paramètre réel α pour lesquelles le système suivant :

$$\begin{cases} x+y-z = 1 \\ x+2y+\alpha z = 2 \\ 2x+\alpha y+2z = 3 \end{cases}$$

(a) n'ait aucune solution ;

(b) ait une infinité de solutions ;

(c) ait une solution unique.

Exercice 4. Pour quelles valeurs des paramètres réels α, β, γ le système suivant admet au moins une solution ?

$$\begin{cases} x+2y-3z = \alpha \\ 3x+8y-14z = \beta \\ 2x+4z = \gamma \end{cases}$$

Géométrie affine

1 Exercices d'entraînement

Géométrie affine $\mathbb{R}^2$

$R = (0, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé d'un plan $\mathcal{P}$.

Exercice 5.

1. Donner une équation paramétrique puis cartésienne de la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ dans les cas suivants :
   (a) $A = (1; 2)$ et $\vec{u} = (2; 3)$.
   (b) $A = (-1; 0)$ et $\vec{u} = (1; 4)$.
   (c) $A = (1/2; 3)$ et $\vec{u} = (2; 5)$.
2. Donner les coordonnées des points d'intersection de ces droites.

Exercice 6. Donner une équation paramétrique puis cartésienne de la droite passant par les points A et B dans les cas suivants :

1. $A = (1; 2)$, $B = (3; 1)$;
2. $A = (-2; 3)$, $B = (1; 1)$;
3. $A = (1; -2)$, $B = (1; 2)$.

Exercice 7. Trouver un vecteur directeur des droites suivantes, puis donner une équation paramétrique de ces droites : $2x + 3y = 2$; $-x - 3y = 0$; $y = 0$; $x = 0$; $4x - 5y = 0$.

Exercice 8. Écrire l'équation de la droite passant par (3,-5) et parallèle à la droite d'équation $x + 2y - 4 = 0$

Exercice 9. Écrire l'équation de la droite passant par (-1,2) et orthogonale au vecteur $\vec{v} = (5, 1)$

Géométrie affine $\mathbb{R}^3$

Dans la suite on travaille dans le repère $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

Exercice 10. L'espace affine $\mathbb{R}^3$ est muni du repère canonique $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère les 4 points A, B, C, D donnés. Est-ce que $\mathcal{R}' = (A; \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$ définit bien un nouveau repère ?

1. $A(2, -1, 0)$, $B(7, -1, -1)$, $C(-3, 0, -2)$, $D(3, -6, -3)$.
2. $A(4, 1, 4)$, $B(7, 3, 1)$, $C(9, 0, 0)$, $D(5, 2, 3)$.
3. $A(0, -1, 3)$, $B(5, -6, 4)$, $C(-4, 1, -2)$, $D(-3, 3, 6)$.

Exercice 11. Donner une équation cartésienne (dans $\mathcal{R}$) du plan de l'espace passant par les points A, B et C dans les cas suivants :

1. $A = (1; 2; 0)$, $B = (3; 1; -1)$, $C = (1; -1; 1)$.
2. $A = (-2; 3; 3)$, $B = (1; 1; 1)$, $C = (-1; 1; 2)$.
3. $A = (1; -2; -1)$, $B = (1; 2; 0)$, $C = (1; 0; 1)$.

Exercice 12. Donner l'équation du plan passant par $A = (1, 1, 0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = (1, 0, -1)$ et $\vec{v} = (0, 2, 3)$

Exercice 13. Donner l'équation du plan passant par $A = (1, 1, -1)$ et orthogonal au vecteur $\vec{u} = (1, -1, 2)$

Exercice 14. Extraire une base de vecteurs directeurs des plans d'équation :

1. $x + y + z = 2$;
2. $2x - y + z = 1$;
3. $x - 2y + 3z = -1$;
4. $3x + y + z = 0$;
5. $2x + y = 0$;
6. $z = 0$.

Exercice 15. Donner une équation paramétrique et un système d'équations cartésiennes de la droite de l'espace passant par les points A et B dans les cas suivants :

1. $A(1,1,0)$ et $B(-1,0,2)$.
2. $A(2,2,3)$ et $B(0,0,1)$.
3. $A(-1,-2,-1)$ et $B(1,2,1)$.

Vérifier si ces droites ont des points d'intersection.

Exercice 16. Donner un vecteur directeur puis une équation paramétrique de la droite d'intersection des plans P et P' dans les cas suivants :

1. $P : x+y+z=2$, $P' : 2x-y+z=1$.
2. $P : x-2y+3z=-1$, $P' : 3x+y+z=0$.
3. $P : 2x+y=0$, $P' : z=0$.

Exercice 17. Dire si les couples de droites suivantes sont parallèles, sécantes ou non coplanaires

1. $d_1 : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 3+t \\ z = t \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x = 1+3s \\ y+3-s \\ z = 4s \end{cases}$
2. $d_1 : \begin{cases} x+z=0 \\ x-y-z+2=0 \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x = 2+t \\ y+2t \\ z = 3-t \end{cases}$
3. $d_1 : \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} z=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$
4. $d_1 : \begin{cases} x+z=0 \\ y-z=1 \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2z=0 \end{cases}$
5. $d_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1-3t \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+z=1 \end{cases}$
6. $d_1 : \begin{cases} x = t+1 \\ y = 3t+1 \\ z = 4-t \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x = z-1 \\ y = z+1 \end{cases}$
7. $d_1 : \begin{cases} x-2y=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x-z-1=0 \\ 2y-3z=0 \end{cases}$

Exercice 18. Donner l'équation de la droite passant par A et parallèle à la droite d dans les cas suivants

1. $A=(1,2,-1)$ et $d : \begin{cases} x-1=2y+3 \\ x-1=1-z \end{cases}$
2. $A=(0,1,1)$ et $d : \begin{cases} 2x-y+1=0 \\ 2y-z+2=0 \end{cases}$

Exercice 19. Dans $\mathbb{R}^3$ affine, déterminer l'intersection de

$$(D) : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-t \\ z = 7 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (P) : x+3y-5z+2=0.$$

Exercice 20. Donner les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec le plan P dans les cas suivants :

1. $A=(1;1;0)$, $B=(-1;2;-1)$, $P : 2x+3y+z=0$.
2. $A=(0;0;1)$, $B=(1;1;1)$, $P : x+y+z=0$.
3. $A=(-1;-2;1)$, $B=(1;1;2)$, $P : x-y-z=0$.

Exercice 21. Dans $\mathbb{R}^3$ affine, donner une équation du plan P parallèle à la droite (Oy) et passant par $A=(0,-1,2)$ et $B=(-1,2,3)$.

Exercice 22. Écrire l'équation de la droite passant par $A=(0,2,1)$ et orthogonale au plan $P : x+2y-z+3=0$

Exercice 23. Écrire l'équation du plan passant par $A=(0,1,1)$ et orthogonal à la droite $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ 2y-z+2=0 \end{cases}$

Exercice 24. Déterminer la relation (parallèles, point d'intersection, orthogonaux) entre le plan P et la droite d dans les cas suivants

1. $P : 2x - y + 3 = 0$ et $d : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
2. $P : 3x - y + z - 1 = 0$ et $d : \begin{cases} x = t \\ y = t - 1 \\ z = 2t \end{cases}$
3. $P : x - 2y + 3z - 1 = 0$ et $d : \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$
4. $P : 3x + 5y - 5z - 1 = 0$ et $d : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$

2 Exercices d'approfondissement

Exercice 25. L'espace affine $\mathbb{R}^3$ est muni du repère canonique $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère le nouveau repère $\mathcal{R}' = (O'; \vec{\imath'}, \vec{\jmath'}, \vec{k'})$ avec $O' = (0, 0, 1)$, $\vec{\imath'} = (0, 1, 0)$, $\vec{\jmath'} = (1, 0, 2)$, et $\vec{k'} = (0, 1, 1)$.

1. Soit un point M de coordonnées (x, y, z) dans le repère $\mathcal{R}$. Donner ses coordonnées (x', y', z') dans $\mathcal{R}'$.
2. Écrire la formule de changement de repère inverse, de $\mathcal{R}'$ à $\mathcal{R}$.
3. On considère les points $A(0, 0, 3)$, $B(1, 0, 4)$ et $C(1, 1, 1)$ dans $\mathcal{R}$. Donner une équation du plan (ABC) dans le repère $\mathcal{R}$, puis dans le repère $\mathcal{R}'$.

Exercice 26. Les formules suivantes définissent-elles bien un changement de repère ? Si oui, donner la formule du changement de repère inverse.

1. $\begin{cases} x' = y - z + 1 \\ y' = -x - 4y + 5z + 2 \\ z' = x - 5y + 5z + 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = 5x + 4y + 3z - 2 \\ y' = 2x + 3y + z + 2 \\ z' = 4x - y + 3z + 2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x' = -2x - 4y + 2z - 2 \\ y' = x + y - 5z + 1 \\ z' = -3x - 4y + 4z - 2 \end{cases}$

Exercice 27. On considère un plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit A, B, C trois points du plan $\mathcal{P}$ et de coordonnées respectivement $(1, 1)$, $(3, 1)$ et $(2, 2)$.

1. Vérifier que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.
2. Soit D un point de coordonnées $(4, -5)$ dans le repère $\mathcal{R}' = (A; \vec{AB}, \vec{AC})$. Quelles sont les coordonnées de D dans le repère $\mathcal{R}$?
3. Soit M un point du plan $\mathcal{P}$ de coordonnées (x', y') dans $R' = (A, \vec{AB}, \vec{AC})$. Quelles sont les coordonnées de M dans R ?
4. Considérons la droite Δ d'équation cartésienne $y' = x'$ dans le repère $\mathcal{R}'$. Tracer la droite et donner une équation cartésienne de Δ dans le repère $\mathcal{R}$.
5. Donner une équation cartésienne de la droite (BC) dans le repère $\mathcal{R}$ puis dans le repère $\mathcal{R}'$. Donner les coordonnées du point d'intersection de Δ et (AB) dans les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

Exercice 28. Dans $\mathbb{R}^2$ muni du repère canonique $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(-1, 2)$, $B(-3, 4)$ et $C(1, 4)$. On définit le repère $\mathcal{R}' = (A; \vec{AB}, \vec{AC})$.

1. Soit les points $E(1, -4)$ et $F = (7, 2)$ dans $\mathcal{R}$. Donner les coordonnées de E et F dans le repère $\mathcal{R}'$.
2. Donner une équation paramétrique de la droite (EF) dans chacun des repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.
3. Donner une équation cartésienne de la droite (EF) dans chacun des repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.
4. Soit M un point. Donner une formule permettant de calculer les coordonnées (x, y) de M dans $\mathcal{R}$ en fonction des coordonnées (x', y') de M dans $\mathcal{R}'$.
5. Soit D une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ (avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$) dans $\mathcal{R}$. Donner une équation cartésienne de D dans $\mathcal{R}'$.
6. Appliquer votre formule à la droite (EF).

Exercice 29. On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ affine. Trouver une équation du plan P défini par les éléments suivants dans chacun des cas.

1. A est un point de P, D est une droite contenue dans P

   (a) $A = (4, 1, -3)$ et $(D) : \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 4x - y + 2z = 0 \end{cases}$ (b) $A = (1, 1, 0)$ et $(D) : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

2. D et D' sont des droites contenues dans P

   (a) $(D) : \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$ et $(D') : \begin{cases} 3x - y - z + 5 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$

   (b) $(D) : \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$ et $(D') : \begin{cases} 2x + y - 3z + 7 = 0 \\ 3x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$

Exercice 30. (Droites coplanaires) Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel fixé. Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on donne :

$$(D) : \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases} \qquad (D') : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = a. \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de a les droites D et D' sont-elles coplanaires ?
2. Donner alors l'équation du plan contenant D et D'.

3 Exercices d'évaluation

Exercice 31. On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ affine. Trouver une équation du plan P défini par les éléments suivants dans chacun des cas.

1. P passe par les trois points A, B et C suivants :
   (a) $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 0, 0)$ et $C = (0, 1, 0)$.
   (b) $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 0, 1)$ et $C = (-1, 2, 4)$.
   (c) $A = (5, 0, -1)$, $B = (1, 3, -2)$ et $C = (-2, 4, 5)$.
2. A est un point de P, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base de la direction de P :
   (a) $A = (1, 2, 1)$, $\vec{u} = (4, 0, 3)$ et $\vec{v} = (1, 3, -1)$.
   (b) $A = (1, 0, 2)$, $\vec{u} = (2, -1, 3)$ et $\vec{v} = (-1, 4, 5)$.

Exercice 32. On se place dans $\mathbb{R}^3$ affine. Montrer que les représentations paramétriques suivantes définissent le même plan :

$$(P) : \begin{cases} x = 2 + s + 2t \\ y = 2 + 2s + t \\ z = 1 - s - t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R}) \qquad (P') : \begin{cases} x = 1 + 3u - v \\ y = 3 + 3u + v \\ z = 1 - 2u \end{cases} \quad (u, v \in \mathbb{R})$$