Feuille d'exercices 3

Polynômes et fractions rationnelles

Notions du cours.

Polynômes en une variable, égalité de deux polynômes, somme, produit, degré, division euclidienne

Racines simples et multiples, polynôme dérivé, formule de Taylor pour les polynômes

Arithmétique des polynômes, polynômes irréductibles, cas de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$, PGCD de deux polynômes, théorème de Bezout, lemme d'Euclide

Factorisation en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$, théorème de d'Alembert-Gauss

Fractions rationnelles (en une variable), racines, pôles, degré, écriture irréductible, somme, produit, éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$

Dans cette feuille d'exercices, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Exercices d'entraînement

1.1 Opérations sur les polynômes, dérivation

Exercice 1. Résoudre les équations suivantes où l'inconnue est un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$:

1. $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$
2. $P \circ P = P$

Exercice 2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a, b le polynôme P est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 3. Résoudre les équations suivantes où l'inconnue est un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$:

1. $(P')^2 = 4P$
2. $(X^2 + 1)P'' = 6P$

Exercice 4. Déterminer les polynômes P de degré supérieur ou égal à 1 tels que P' divise P.

1.2 Division euclidienne, arithmétique sur les polynômes

Exercice 5. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

1. On suppose que A divise B et $B \neq 0$. Montrer que $\deg(A) \leq \deg(B)$.
2. On suppose que $AB = 1$. Montrer que $B \neq 0$ et $\deg(B) = 0$.
3. Un polynôme A est *inversible* s'il existe un polynôme B tel que $AB = 1$. Quels sont les polynômes inversibles de $\mathbb{K}[X]$?

Exercice 6. Effectuer les divisions euclidiennes de A par B dans les cas suivants :

1. $A = X^4 - X^3 + X - 2$ et $B = X^2 - 1$;
2. $A = X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4$ et $B = X^2 - 2X + 4$;
3. $A = 4X^3 + X^2$ et $B = X + 1$;
4. $A = X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ et $B = X^2 + 3X - 1$;
5. $A = X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ et $B = X^2 - X - 7$;
6. $A = X^5 - X^2 + 2$ et $B = X^2 + 1$.

Exercice 7. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et a et b deux éléments distincts de $\mathbb{K}$. Sachant que le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est 1 et que celui de la division euclidienne par $X - b$ est -1, quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$?

Exercice 8. Soient $P, A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec P non-constant. On suppose que $A \circ P$ divise $B \circ P$. Montrer que A divise B.

Exercice 9. Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le reste de la division euclidienne de X^m par $X^n - 1$.

Exercice 10. Déterminer le pgcd des deux polynômes suivants :

1. $P = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$ et $Q = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$
2. $P = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1$ et $Q = X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$
3. $P = X^n - 1$ et $Q = (X - 1)^n$, où $n \geq 1$
4. $P = X^n - 1$ et $Q = X^m - 1$, où $n, m \geq 1$

Exercice 11. Soient $A = X^5 - 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1$ et $B = X^3 - X^2 + 2X - 2$.

1. Trouver le pgcd de A et B à l'aide de l'algorithme d'Euclide.
2. Trouver deux polynômes $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = \text{pgcd}(A, B)$.

Exercice 12. Soient $A = X^7 - X - 1$ et $B = X^5 - 1$. Trouver deux polynômes $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.

Exercice 13. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que A^2 divise B^2. Montrer que A divise B.

1.3 Racines, factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Exercice 14. Décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$:

1. $X^4 + 1$;
2. $X^4 + X^2 + 1$;
3. $X^{12} - 1$.

Exercice 15. Soit $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

1. Vérifier que i est racine de P.
2. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 16. Soit $P = a_n X^n + \cdots + a_0$ un polynôme à coefficients entiers tels que $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$.

1. Montrer que si $r = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux est une racine rationnelle de P, alors p divise a_0 et q divise a_n.
2. En déduire la factorisation de $2X^3 - X^2 - 13X + 5$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 17. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants en produits de polynômes irréductibles :

1. $P = X^{2n} + 1$;
2. $Q = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$;

3. $R = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$ (on cherchera les racines doubles de R).

Exercice 18. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit un entier $n \geq 1$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$X^{2n} - 2\cos(n\theta)X^n + 1$$

Exercice 19. Soit j le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
On considère les polynômes $P_m = (X+1)^m - X^m - 1$ et $Q = X^2 + X + 1$ (où m est un entier naturel non nul).

1. Quelle est la décomposition en facteurs irréductibles de Q dans $\mathbb{R}[X]$? Dans $\mathbb{C}[X]$?
2. Vérifier que $(j+1)^2 = j$ et que $(j+1)^3 = -1$.
3. À quelle condition sur m, P_m est-il divisible par Q ?
4. Calculer le reste de la division de P_m par Q puis par $X^2 - 3X + 2$, puis par $X^2 - 2X + 1$.

Exercice 20. Prouver que B divise A dans les cas suivants :

1. $A = X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p}$ et $B = X^2 + X + 1$, avec $n, m, p \geq 0$;
2. $A = (X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$ et $B = X(X+1)(2X+1)$, avec $n \geq 1$;
3. $A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $B = (X-1)^2$, avec $n \geq 1$.

Exercice 21. 1. Est-il vrai qu'un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair possède toujours une racine réelle ?

2. Montrer que le polynôme $P = X^5 - X^2 + 1$ admet une unique racine réelle et que celle-ci est irrationnelle.
3. Montrer que le polynôme $Q = 2X^3 - X^2 - X - 3$ a une racine rationnelle (qu'on calculera). En déduire sa décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 22. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On cherche à montrer qu'il existe $S, T \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = S^2 + T^2$.

1. Vérifier l'identité remarquable $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2$.
2. Résoudre le problème pour P de degré 2.
3. Conclure.

Exercice 23. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes premiers entre eux. On suppose que a est racine d'ordre au moins deux de $P^2 + Q^2$. Montrer que a est racine de $P'^2 + Q'^2$.

Exercice 24. Déterminer toutes les valeurs de $a \in \mathbb{C}$ telles que le polynôme $P = X^3 + X^2 + aX + 6$ admet deux racines b et c vérifiant $b + c = bc$. Déterminer alors toutes les racines du polynôme.

Exercice 25. 1. Soit $P = 1 - X + X^2 - X^3$. Factoriser ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

2. Soit $P = 1 - X + X^2 + \cdots + (-1)^n X^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k X^k$. Déterminer les racines de P dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

Exercice 26. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{C}$ le polynôme $(X+1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?

Exercice 27. Déterminer un polynôme P de degré 3 tel que $P(X) - P(X-1) = X^2$.
En déduire une expression simple de $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ pour tout entier naturel n.

Exercice 28. Soit le polynôme $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1. Montrer que j est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.
2. Quelle conséquence peut-on tirer de la parité de P ?
3. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 29. Soit $P = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n, avec $P(0) \neq 0$. Soient $x_1, \ldots, x_n$ les racines de P (possiblement avec répétition si P a des racines multiples). Exprimer

$$\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}$$

en fonction de $a_0, \ldots, a_n$.

1.4 Décomposition en éléments simples

Exercice 30. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles (sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$) :

1. $\dfrac{X^2+4}{X^3-3X^2-2X+4}$

2. $\dfrac{-2X^2+6X-7}{X^3-3X+2}$

3. $\dfrac{X^2-1}{X^4+X^2}$

4. $\dfrac{X^6}{X^5-X}$

5. $\dfrac{X^6+1}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1}$

6. $\dfrac{1}{X^n-1}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 31. 1. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{1}{X(X+1)} \qquad \frac{1}{X(X+1)(X+2)} \qquad \frac{1}{X(X+1)(X+2)(X+3)}.$$

2. En déduire une expression simple des sommes :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \quad \text{et} \quad C_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

3. En déduire un calcul des limites de chacune de ces suites.

2 Exercices d'approfondissement

Exercice 32. Soient $n \geq 1$ et $a_0, \cdots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout $i = 0, \cdots, n$, on pose :

$$L_i(X) = \prod_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}$$

Les polynômes L_i sont appelés polynômes interpolateurs de Lagrange.

1. Calculer $L_i(a_j)$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$.
2. Soient $b_0, \cdots, b_n$ des réels fixés. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n qui vérifie :
$$\forall\, 1 \leq j \leq n\,,\ P(a_j) = b_j$$
3. Application : trouver l'unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 qui vérifie :
$$P(0) = 1\,,\ P(1) = 0\,,\ P(-1) = -2 \ \text{ et } \ P(2) = 4\,.$$

Exercice 33. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Existe-t-il $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P - \lambda$ soit scindé à racines simples ?

Exercice 34. 1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$.

2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

Exercice 35. Soit $P = \prod_{j=1}^{r} (X - a_j)^{m_j}$ un polynôme à coefficients complexes (avec des a_j distincts et des multiplicités $m_j \geq 1$).

1. Écrire la décomposition en éléments simples de la fraction P'/P.
2. En déduire que toute racine de P' est dans l'enveloppe convexe des racines de P.

   L'enveloppe convexe de $S = \{a_1, \ldots, a_r\}$ est donnée par $\operatorname{Conv}(S) = \left\{ \sum_{j=1}^{r} \lambda_j a_j \mid \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^{r} \lambda_j = 1 \right\}$.

Exercice 36. Donner une expression de la dérivée n-ème de $f(x) = \arctan(x)$.
Indication : On pourra décomposer sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle $\frac{1}{x^2+1}$ et utiliser, pour $a \in \mathbb{C}$, la formule, que l'on vérifiera par récurrence :

$$\left(\frac{1}{X-a}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(X-a)^{n+1}}.$$

3 Exercices d'évaluation

Exercice 37. (CC1 MMAL2 2024) On considère le polynôme $P = X^6 - 3X^4 - 9X^2 - 5 \in \mathbb{C}[X]$.

1. Vérifier que i est racine de P de multiplicité exactement 2.
2. Donner la factorisation de P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 38. (Examen MMAL2 2021) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle

$$\frac{3}{(X-1)(X^3-1)}$$

Exercice 39. (Partiel MMAL2 2024) Calculer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle

$$\frac{X^5+X+1}{X^4-1}$$

Exercice 40. (CC4 MIASH 2024-2025) On considère le polynôme P suivant :

$$P = X^6 - 2X^5 + 3X^4 - 4X^3 + 3X^2 - 2X + 1$$

1. Montrer que 1 est racine de P de multiplicité 2.
2. Montrer que i est racine de P de multiplicité 2.
3. Montrer que P possède exactement 3 racines complexes, toutes de multiplicité 2.
4. En déduire qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q^2$.
5. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
6. Décomposer en éléments simples (sur $\mathbb{R}$) la fraction rationnelle :

$$\frac{X^2}{(X-1)(X^2+1)}$$

Exercice 41. (Examen MMAL2 2019) On considère le polynôme P et la fraction rationnelle F suivants :

$$P = X^7 + 2X^5 - X^4 + X^3 - 2X^2 - 1 \text{ et } F = \frac{X^3+X^2+X+1}{X^2+X+1}$$

1. Soit $u \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que $\overline{u}$ est racine de P.
2. Démontrer que i est racine de P et calculer sa multiplicité.
3. Décomposer P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
4. Décomposer F en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

5. Soit $u \in \mathbb{C}$ et $n \geq 0$ un entier. Démontrer que

$$\left(\frac{1}{X-u}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(X-u)^{n+1}}$$

6. Calculer la dérivée 2019^e de l'application

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & F(x) \end{array}$$

en 0 (on ne demande pas de simplifier le résultat obtenu).