Université Paris Cité

Polynômes et arithmétique

Année 2025-26
L1 Math, Math-Info, METIS, DLMP

Feuille d'exercices n° 2

Nombres complexes

Notions du cours. *Définition des nombres complexes.* Forme algébrique $x + \mathbf{i}y$, partie réelle et partie imaginaire, corps des nombres complexes (opérations d'addition, multiplication, division par un nombre complexe non nul), nombre complexe conjugué, module.

Formes trigonométrique et exponentielle. Argument d'un nombre complexe, écriture sous forme trigonométrique $r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)$, sous forme exponentielle $r\exp(\mathbf{i}\theta)$. Passage d'une forme à l'autre. Nombre complexe de module 1, inverse d'un nombre complexe de module 1. Exponentielle complexe.

Formule du binôme de Newton et formules d'Euler. Coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$, triangle de Pascal, développement de $(a+b)^n$. Formules d'Euler $\cos\theta = (e^{\mathbf{i}\theta} + e^{-\mathbf{i}\theta})/2$ et $\sin\theta = (e^{\mathbf{i}\theta} - e^{-\mathbf{i}\theta})/(2\mathbf{i})$. Linéarisation de $\cos^k\theta$ et de $\sin^k\theta$. Expression de $\cos(k\theta)$ et de $\sin(k\theta)$ comme polynôme en $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Racines n^e. Existence et détermination des n racines n^{e} de l'unité, pour $n \geq 1$. Existence et détermination des n racines n^{e} d'un nombre complexe non nul.

Initiation aux polynômes à coefficients réels ou complexes. Résolution de l'équation du second degré. Théorème de d'Alembert ; conséquence : écriture d'un polynôme comme produit de facteurs linéaires. Cas d'un polynôme à coefficients réels : les racines sont deux à deux conjuguées.

Interprétation géométrique des nombres complexes. Affixe d'un point, représentation géométrique d'un nombre complexe. Notion de transformation géométrique, expression comme une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Notion de point fixe. Expression d'une translation, d'une rotation, d'une homothétie. Détermination de la composée de deux telles transformations.

1 Exercices d'entraînement

1.1 Trigonométrie

Exercice 1. À partir du cercle trigonométrique, retrouver les relations entre :

1. $\cos(\pi/2 - \theta)$ et $\sin(\theta)$,
2. $\sin(\pi/2 - \theta)$ et $\cos(\theta)$,
3. $\cos(\pi/2 + \theta)$ et $\sin(\theta)$,
4. $\sin(\pi/2 + \theta)$ et $\cos(\theta)$,

Exercice 2.

1. Exprimer $\cos(2\alpha)$ et $\sin(2\alpha)$ en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.
2. Exprimer $\cos\frac{\alpha}{2}$ et $\sin\frac{\alpha}{2}$ en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.
3. Sachant que $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$, donner les valeurs de $\cos\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{\pi}{10}$.

Exercice 3. Résoudre les équations suivantes :

(i) $x + 2\pi \equiv 2x - \dfrac{\pi}{3} \mod 2\pi$, (ii) $5x \equiv \dfrac{\pi}{2} \mod 2\pi$, (iii) $x \equiv \dfrac{\pi}{3} - 3x \mod \pi$

(iv) $3x - \pi \equiv 2x - \dfrac{\pi}{2} \mod \pi/2$, (v) $5x - 1 \equiv \dfrac{\pi}{2} \mod \pi/3$, (vi) $x \equiv \dfrac{\pi}{3} - 3x \mod \pi/4$

1.2 Formes algébriques, trigonométriques, exponentielles

Exercice 4. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants, et calculer leurs conjugués.

1. $\dfrac{2}{1-2\mathbf{i}}$
2. $\dfrac{1}{1-2\mathbf{i}}+\dfrac{1}{1+2\mathbf{i}}$
3. $\dfrac{2+\mathbf{i}}{3-2\mathbf{i}}$
4. $\left(\dfrac{1+\mathbf{i}}{2-\mathbf{i}}\right)^2$
5. $\dfrac{2+5\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}+\dfrac{2-5\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}$
6. $\dfrac{2+5\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}-\dfrac{2-5\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}$

Exercice 5. Ecrire sous forme trigonométrique et algébrique les nombres complexes suivants.

1. $3e^{\mathbf{i}\pi/3}$
2. $7e^{5\mathbf{i}\pi}$
3. $2e^{3\mathbf{i}\pi/2}$

Exercice 6. Ecrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes suivants.

1. $-3\sqrt{2}$
2. $\pi\mathbf{i}$
3. $3+4\mathbf{i}$
4. $\sqrt{3}-\mathbf{i}$
5. $(\mathbf{i}-1)^9$
6. $\sqrt{2}+\sqrt{6}\mathbf{i}$
7. $\dfrac{1-\mathbf{i}}{\sqrt{3}+\mathbf{i}}$
8. $e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}+e^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{3}}$

Exercice 7. Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants.

1. $-3\sqrt{2}$
2. $\pi\mathbf{i}$
3. $\sqrt{3}-\mathbf{i}$
4. $(1-\mathbf{i})^9$
5. $(\sqrt{5}-\mathbf{i})(\sqrt{5}+\mathbf{i})$
6. $e^{3+4\mathbf{i}}$

Exercice 8. Déterminer les nombres complexes z tels que :

1. $|\overline{z}-\mathbf{i}|=1$
2. $z^2=\overline{z}$
3. $z\overline{z}=z^3$
4. $\mathbf{i}\,\mathrm{Re}(z^2)-\mathrm{Im}(z^2)=z$

1.3 Formule du binôme, formule de Moivre et formules d'Euler

Exercice 9. En utilisant la formule du binôme de Newton, développer les expression suivantes.

1. $(a+b)^6$
2. $(x+\mathbf{i}y)^4$
3. $(1+\mathbf{i})^5$
4. $(1-2\mathbf{i})^3$
5. $(10+1)^4$
6. $(a+b+c)^3$

Exercice 10. Exprimer en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ les formules trigonométriques suivantes.

1. $\cos(4\alpha)$,
2. $\sin(4\alpha)$,
3. $\cos(5\alpha)$,
4. $\sin(5\alpha)$,
5. $\cos(3\alpha)\sin(3\alpha)$,
6. $\sin(6\alpha)$.

Exercice 11. Exprimer en fonction de $\tan\alpha$ les formules trigonométriques suivantes :

1. $\cos(2\alpha)$,
2. $\sin(2\alpha)$,
3. $\cos(4\alpha)$,
4. $\sin(4\alpha)$,
5. $\tan(2\alpha)$,
6. $\tan(3\alpha)$,
7. $\tan(4\alpha)$,
8. $\tan(5\alpha)$.

Exercice 12. Linéariser les formules trigonométriques suivantes :

1. $\cos^3 \alpha$,
2. $\sin^3 \alpha$,
3. $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha$,
4. $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$,
5. $\cos^5 \alpha$,
6. $\sin^5 \alpha$.

Exercice 13. Résoudre les équations suivantes :

$$\cos x = \sin x \qquad \cos x = \cos(3x) \qquad \sin 2x = \cos(3x)$$

1.4 Racines et polynômes

Exercice 14. Trouver les racines carrées complexes des nombres suivants.

1. 1
2. $\mathbf{i}$
3. $-1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$
4. $1 + \mathbf{i}$
5. $\mathbf{i} - 2$
6. $2e^{\mathbf{i}2\pi/5}$

Exercice 15. Soit $w = 1 + \mathbf{i}$.

1. Déterminer les racines carrées de w sous forme cartésienne.
2. Déterminer les formes exponentielle et trigonométrique de w et ses racines carrées.
3. En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $z^2 - \mathbf{i}z + 2 = 0$
2. $z^2 + 2\mathbf{i}z - 1 = 0$
3. $z(z - \mathbf{i}) = \mathbf{i}z + 2$
4. $z^2 - 3z + 3 + \mathbf{i} = 0$
5. $z^4 + 2z^3 + 4z^2 = 0$
6. $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$

Exercice 17. Exprimer comme produit de facteurs linéaires les polynômes suivants.

1. $\mathbf{i}z^2 - 1$
2. $z^2 - 3z + 2$
3. $z^4 + 1$
4. $z^4 - 3\mathbf{i}z^3 - (1 + 3\mathbf{i})z^2$
5. $z^3 + z^2 + z + 1$
6. $2z^2 + \mathbf{i}z - 3$
7. $z^2 - 2z + 4\mathbf{i}$
8. $\mathbf{i}z^3 + (1 - 2\mathbf{i})z^2 + 2(\mathbf{i} - 1)z + 2$

Exercice 18. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $z^4 + 1 = 0$
2. $z^5 + 1 = 0$
3. $z^6 = \frac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{1-\mathbf{i}\sqrt{3}}$
4. $\overline{z}^2 - 2\mathbf{i}\overline{z} + \mathbf{i} = 0$
5. $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$
6. $z^6 - 2\mathbf{i}z^3 - 1 = 0$

À partir du point 2, déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{5}$ et $\sin \frac{\pi}{5}$.

Exercice 19.

1. Déterminer les formes cartésiennes, trigonométriques et exponentielles des racines 4-èmes de $1+\mathbf{i}\sqrt{3}$.
2. En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

1.5 Nombres complexes et géométrie

Exercice 20. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal centré en 0 on considère les points A, B, O et M d'affixe respective $\mathbf{i}$, $2 - \mathbf{i}$, 0 et z.

1. Supposons que $z = 1$. Placer les points A, B et M dans le plan complexe. Les points A, B et M sont-ils alignés ?
2. Supposons que $z = 1 + \mathbf{i}$. Placer les points A, B et M dans le plan complexe. Quel est le module de z ? Quel est l'argument de z ? Le triangle est-il rectangle en M ?

Exercice 21. On considère les applications f, $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ données par

$$f(z) = 2z + \mathbf{i} \qquad \text{et} \qquad g(z) = \frac{1-\mathbf{i}}{\sqrt{2}}z + 3.$$

1. Déterminer si f définit une rotation/une homothétie, et calculer le centre et l'angle/le rapport de f le cas échéant.
2. Déterminer les ensembles des points invariants des applications $u = f \circ g$ et $v = g \circ f$. L'application u est-elle une rotation/une homothétie ? L'application v est-elle une rotation/une homothétie ?

Exercice 22. Pour tout nombre complexe t, on définit la transformation

$$f_t\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto (t + \mathbf{i})z - 1.$$

1. Déterminer pour quelles valeurs de t la transformation f_t est une homothétie, respectivement une rotation, respectivement une translation.
2. Supposons $t = 0$, calculer le vecteur de translation, ou le centre et l'angle/le rapport de f_0 suivant que f_0 est une translation, respectivement une rotation, resp. une homothétie.
3. Supposons $t = 2 - \mathbf{i}$, calculer le vecteur de translation, ou le centre et l'angle/le rapport de $f_{2-\mathbf{i}}$ suivant que $f_{2-\mathbf{i}}$ est une translation, respectivement une rotation, resp. une homothétie.
4. Supposons $t = 1 - \mathbf{i}$, calculer le vecteur de translation, ou le centre et l'angle/le rapport de $f_{1-\mathbf{i}}$ suivant que $f_{1-\mathbf{i}}$ est une translation, respectivement une rotation, resp. une homothétie.

2 Exercices d'approfondissement

Exercice 23. Soient $z_1 = 3\sqrt{2}(1+\mathbf{i})$, $z_2 = \sqrt{3}+\mathbf{i}$.

1. Déterminer les formes exponentielle et trigonométrique de z_1 et z_2.
2. Déterminer la forme cartésienne de $z = \frac{z_1}{z_2^2}$.
3. Déterminer les formes exponentielle et trigonométrique de z.
4. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 24. Pour tout entier $n \geq 1$, déterminer les racines n^{e} des nombres suivants : $\mathbf{i}^{n/2}$, $2^n e^{\mathbf{i}(2n+3)\pi}$.

Exercice 25. Soient $z_1 = 3\sqrt{2}(1+\mathbf{i})$, $z_2 = \sqrt{3}+\mathbf{i}$.

1. Déterminer les formes exponentielle et trigonométrique de z_1 et z_2.
2. Déterminer la forme cartésienne de $z = \frac{z_1}{z_2^2}$.
3. Déterminer les formes exponentielle et trigonométrique de z.
4. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 26. On considère le nombre complexe :

$$\mu = \frac{\sqrt{5}-1+\mathbf{i}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

1. Montrer que $\mu = e^{\mathbf{i}2\pi/5}$.
2. Écrire sous forme cartésienne $z = e^{\mathbf{i}\pi/3}$.
3. Écrire μ/z sous forme trigonométrique, exponentielle et cartésienne.
4. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{15}$ et de $\sin\frac{\pi}{15}$.

Exercice 27. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$,
2. $z^4 - 2\cos(2\theta)z^2 + 1 = 0$.

Exercice 28.

1. Donner une racine 6-èmes primitive de l'unité sous formes cartésienne et exponentielle.
2. Vérifier que $2+\mathbf{i}$ est une racine 6-ème de $w = -117+44\mathbf{i}$.
3. Déterminer les formes exponentielle et cartésienne de toutes les racines 6-èmes de w.
4. Dessiner les racines 6-èmes de w dans le plan cartésien, et décrire la figure obtenue en joignant les racines avec arguments consécutifs.

Exercice 29. L'objectif de cet exercice est d'écrire au moyen de racines carrées de nombres réels les nombres $\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{\pi}{10}$.

1. Écrire les formes trigonométrique et exponentielle des racines 5-èmes de l'unité, et les dessiner de façon approximative dans le plan cartésien.

2. Soit $z = x + \mathbf{i}y$ une racine 5-ème de l'unité. Montrer que le quotient y/x peut prendre au plus cinq valeurs possibles, qu'on déterminera. *Indication :* utiliser l'égalité $z^5/x^5 = (1 + \mathbf{i}\,y/x)^5$ pour calculer y/x.

3. Trouver la valeur de $\tan\frac{2\pi}{5}$ puis de $\tan\frac{\pi}{10}$.

4. Trouver la valeur de $\tan\frac{4\pi}{5}$ puis de $\tan\frac{\pi}{5}$.

5. En utilisant le fait que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, en déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{\pi}{10}$.

Exercice 30. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer :

1. $(1+\mathbf{i})^n + (1-\mathbf{i})^n$,
2. $(1+\mathbf{i})^n - (1-\mathbf{i})^n$,
3. $\left(\frac{-1+\sqrt{3}\mathbf{i}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{3}\mathbf{i}}{2}\right)^{2n}$.

Exercice 31. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\alpha)$.

Exercice 32.

1. Déterminer les formes trigonométriques et exponentielles des racines 5-èmes de l'unité.

2. Dessiner de façon approximative les racines 5-èmes de l'unité dans le plan cartésien.

3. Soit $z = x + \mathbf{i}y$ une racine 5-ème de l'unité. Trouver les valeurs possibles pour y/x.

4. En déduire les valeurs de $\tan\frac{\pi}{5}$ et $\tan\frac{\pi}{10}$.

5. En utilisant le fait que $x^2 + y^2 = 1$, déterminer les formes cartésiennes des racines 5-èmes de l'unité.

6. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{\pi}{10}$.

3 Exercices d'évaluation

Exercice 33 (Examen 2017 Math/MIASHS/Math-Info). Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose : $P(z) = z^4 - 2\sin(\theta)z^2 + 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1. Résoudre l'équation (*) $Z^2 - 2\sin(\theta)Z + 1 = 0$, d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.

2. Résoudre l'équation (**) $P(z) = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   On notera z_1, z_2, z_3 et z_4 les solutions de (**).

3. Factoriser P en produit de « facteurs linéaires », autrement dit, écrire $P(z)$ comme produit de nombres complexes de la forme $az + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$ indépendants de z.

4. **Dans la suite on suppose que** $\theta = 0$. Ainsi (**) s'écrit : $z^4 + 1 = 0$.
   Exprimer z_1, z_2, z_3 et z_4 sous la forme exponentielle et sous la forme algébrique (cas $\theta = 0$).
   Représenter géométriquement les points obtenus.

5. Calculer sous la forme exponentielle les racines quatrième de l'unité.
   Représenter géométriquement les points obtenus.

6. Quelle transformation du plan permet de passer des représentations des racines quatrième de l'unité dans le plan aux représentations de z_1, z_2, z_3 et z_4 dans le plan ?

Exercice 34 (Partiel 2018 Math/MIASHS/Math-Info). Résoudre l'équation $P(z) = 0$ en l'inconnue $z \in \mathbb{C}$, où $P(z) = z^2 - (4+i)z + 5(1+\mathbf{i})$.

Exercice 35 (Examen 2018 MIASHS session 2). On considère le polynôme à coefficients complexes

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + (3 - 2\mathbf{i})z + (2\mathbf{i} - 1).$$

1. Montrer que 1 est racine du polynôme P.
2. Déterminer des nombres complexes a, b et c tels que $P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c)$.
3. En déduire les solutions z_1, z_2, z_3 dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.
4. On se place dans un plan affine $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé.
   (a) Placer les points 1 et $-\mathbf{i}$ dans ce plan.
   (b) Donner une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points 1 et $-\mathbf{i}$ puis justifier que les affixes des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 appartiennent à D.

Exercice 36 (Partiel 2021 Math/Math-Info). Dans cet exercice, on considère le nombre complexe $\alpha = -2 + 2\mathbf{i}$ et le polynôme à coefficients complexes $Q(z) = z^3 - 3\mathbf{i}z^2 - 3z + 2 - \mathbf{i}$.

1. (a) Determiner les racines cubiques de α sous forme exponentielle.
   (b) Représenter dans le plan complexe les solutions obtenues.
2. Développer $(z - \mathbf{i})^3$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Q(z) = 0$ (on pourra remarquer que cette équation est équivalente à l'équation $(z - \mathbf{i})^3 = \alpha$).
4. (a) Donner l'expression de la rotation f de centre $\mathbf{i}$ et d'angle $2\pi/3$.
   (b) Soit z une racine du polynôme Q. Montrer que $f(z)$ est une racine du polynôme Q.

Exercice 37 (Examen 2023). Soit $\Omega = \sqrt{3} + i$.

1. Calculer la forme cartésienne des racines carrées ω_1 et ω_2 de Ω.
2. Déterminer la forme exponentielle de Ω ayant son argument dans $[0, 2\pi[$. Faire de même pour ω_1 et ω_2.
3. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.
4. On considère les points A d'affixe Ω, B d'affixe $2e^{i\pi/12}$.
   (a) Représenter A et B dans le plan affine complexe.
   (b) Exprimer l'unique translation $t : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ du plan complexe vérifiant $t(A) = B$.
   (c) Montrer qu'il existe une unique rotation du plan complexe $r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, de centre l'origine, et vérifiant $r(A) = B$; donner l'expression de $r(z)$ pour tout nombre complexe z.