Chapitre V

Systèmes d'équations linéaires

1 Définitions

1.2 Système d'équations linéaires

Définition

Un système d'équations linéaires à n équations et p inconnues $(x_1, \ldots, x_p)$ peut s'écrire

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & \ldots & + & a_{1,p}\,x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 & + & \ldots & + & a_{n,p}\,x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Les nombres $a_{i,j}$ et b_i sont appelés coefficients du système. Ce sont des nombres réels ou complexes.

1.3 Système homogène associé

Définition

On appelle **système homogène associé** au système (S) défini précédemment le système :

$$(SH)\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & \ldots & + & a_{1,p}\,x_p & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 & + & \ldots & + & a_{n,p}\,x_p & = & 0 \end{array}\right.$$

1.4 Systèmes équivalents

Définition

Deux systèmes sont **équivalents** si et seulement si ils ont le même ensemble de solutions.

1.5 Système compatible

Définition

Un système est dit **compatible** si et seulement si il admet au moins une solution.

Propriété

Tout système homogène est **compatible**.

Démonstration : un système homogène a toujours pour solution évidente la solution nulle $(0, \ldots, 0)$.

1.6 Propriétés

Propriété 1

Soit $X = (x_1, \ldots, x_p)$ une solution du système (S) et Y une solution du système homogène associé, alors $X + Y$ est une solution de (S).

Démonstration immédiate.

Propriété 2

L'ensemble des solutions d'un système **homogène** à coefficients réels et à p inconnues est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$, c'est-à-dire que c'est un sous ensemble de $\mathbb{R}^p$ contenant le vecteur nul $(0, \ldots, 0)$ et stable par combinaison linéaire.

Démonstration
On note (SH) le système.
$(0, \ldots, 0)$ est une solution évidente de (SH) car il est homogène.

on note $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de (SH).

$\mathcal{S}_h$ est stable par combinaison linéaire signifie : Soient α et β dans K, $X = (x_1, \ldots, x_p)$ et $Y = (y_1, \ldots, y_p)$ dans $\mathcal{S}_h$ alors $\alpha X + \beta Y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \ldots, \alpha x_p + \beta y_p) \in \mathcal{S}_h$.

En effet, pour tout $i \in [1, n]$, $\alpha X + \beta Y$ vérifie la i-ième équation de (SH) car :
$a_{i,1}(\alpha x_1 + \beta y_1) + \ldots + a_{i,p}(\alpha x_p + \beta y_p) = \alpha(a_{i,1}x_1 + \ldots + a_{i,p}x_p) + \beta(a_{i,1}y_1 + \ldots + a_{i,p}y_p) = \alpha.0 + \beta.0 = 0.$

Propriété 3

Si X_0 une solution particulière de (S) et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions du système homogène associé à (S), alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (S) est $\mathcal{S} = X_0 + \mathcal{S}_h = \{X_0 + Y / Y \in \mathcal{S}_h\}$.

Démonstration
On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S).

D'après la propriété 1, on a $X_0 + \mathcal{S}_h \subset \mathcal{S}$.

On montre que l'on a aussi $X_0 + \mathcal{S}_h \supset \mathcal{S}$.
En effet, soit Y une solution de S alors $Y - X_0$ est solution de (SH) donc $Y \in X_0 + \mathcal{S}_h$.

Ecriture matricielle

On appelle **matrice** un tableau de nombres (que l'on note entre deux grandes parenthèses). Les nombres figurant dans une matrice sous appelé **coefficients** de la matrice.

Pour alléger l'écriture, on peut écrire le système

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right. \quad \text{sous la forme matricielle :} \quad (S) \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} & b_n \end{array} \right)$$

A gauche du trait vertical, on ne fait figurer que les coefficients des inconnues, à droite du trait les seconds membres. Cette écriture est très pratique mais n'a de sens que si on respecte scrupuleusement l'ordre des inconnues et des colonnes.

2 Méthode du Pivot de Gauss

2.2 Système échelonné

Définitions : pivot, système échelonné

- On appelle **pivot d'une ligne** le premier coefficient non nul de cette ligne.
- Un système est dit **échelonné** si et seulement si le pivot de chaque ligne est à droite (au sens strict) de celui de la ligne précédente.

Exemples : les pivots sont entourés.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}\right)$$

Ce dernier écrit en notation classique $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} \boxed{3}x & - & 3y & + & 2z & - & t & = & 1 \\ & & & & \boxed{2}z & + & 3t & = & 2 \\ & & & & & & \boxed{1}t & = & -4 \\ & & & & & & 0 & = & \boxed{1} \end{array}\right.$

Définition : inconnues principales et secondaires

Dans un système échelonné, on appelle **inconnues principales** celles dont le coefficient sur une des lignes est un pivot, les autres inconnues sont appelées **secondaires**.

Exemple

$$\left\{\begin{array}{r} \boxed{-1}x + 2y + 3z + 2t = 3 \\ \boxed{2}z = 5 \end{array}\right.$$

Dans ce système échelonné, x et z sont les inconnues principales, y et t les inconnues secondaires.

2.3 Solutions d'un système échelonné

Propriété : existence (compatibilité)

Un système échelonné admet des solutions (est compatible) si et seulement si il n'y a pas de pivot sur la colonne des seconds membres.

Explication : si il y a un pivot sur la colonne des seconds membres, l'équation correspondante est $0 = 1$.

Exemple de système ***incompatible***

$$\left\{\begin{array}{r} \boxed{1}x + 2y + 3z = -1 \\ \boxed{1}z = 2 \\ 0 = \boxed{1} \end{array}\right.$$

Propriété : unicité

Un système échelonné compatible admet une solution unique si et seulement si il n' a pas d'inconnue secondaire.

Explication : on a un système triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls.

Exemple

$$\left\{\begin{array}{r} \boxed{1}x \quad + 2z = 0 \\ \boxed{1}y - z = 3 \\ \boxed{1}z = 2 \end{array}\right.$$

Propriété : solutions multiples

Un système échelonné compatible admet des solutions multiples si et seulement si il possède au moins une inconnue secondaire.
La dimension du sous-espace affine des solutions est égale au nombre d'inconnues secondaires.

Expression paramétrique des solutions multiples

Pour exprimer l'ensemble des solutions de manière paramétrique :
1) On remplace toutes les inconnues secondaires par des paramètres dont les valeurs sont quelconques.
2) On calcule les inconnues principales en fonction de ces paramètres.

Exemple

$$\begin{cases} \boxed{1}x + 2y + 3z + 2t = 3 \\ \hfill \boxed{\text{z}} = 2 \end{cases}$$

Propriété

Si le nombre d'équations est strictement inférieur au nombre d'inconnus, le système homogène associé a au moins une solution non nulle (c.a.d. il admet des solutions multiples).

Démonstration : on note n le nombre d'équations et p le nombre d'inconnues.

Si le système est échelonné, le système homogène associé a au moins la solution nulle.

De plus, on a au plus n pivots (1 par ligne non nulle) et p inconnues, si $n < p$, il y a plus d'inconnues que de pivots, donc il y a des inconnues secondaires, c.a.d. que le système admet des solutions multiples.

Si le système n'est pas échelonné, par la méthode du pivot de Gauss, on peut obtenir un système échelonné équivalent à n équations et p inconnues et le raisonnement précédent peut alors s'appliquer.

2.4 Opérations élémentaires

Définition

On appelle **opération élémentaire** une des trois opérations suivantes :
1) Permuter deux lignes.
2) Multiplier une ligne par un scalaire **non nul**.
3) Ajouter à une ligne L_i une **autre** ligne L_j $(j \neq i)$ multipliée un scalaire λ quelconque $(L_i \to L_i + \lambda L_j)$.

Théorème

Les opérations élémentaires transforment un système en un système équivalent.

Démonstration
1) Le système est évidemment équivalent si on permute deux lignes.
2) Appelons (S) le système initial et (S') le système obtenu en multipliant la ligne L_i par le scalaire $\lambda \neq 0$.
   Si $X = (x_1, \ldots, x_p)$ est solution de (S), alors X vérifie la ligne $L'_i = \lambda L_i$ de (S'), les autres lignes étant identiques dans S et S', X est solution de (S').
   Si $X = (x_1, \ldots, x_p)$ est solution de (S'), alors X vérifie la ligne $L_i = \frac{1}{\lambda} L'_i$ de (S) car $\lambda \neq 0$, les autres lignes étant identiques dans S' et S, X est solution de (S).
   Si λ est on nul, on a bien deux systèmes équivalents.
3) Appelons (S) le système initial et (S') le système dont seule la i-ème ligne est différente avec $L'_i = L_i + \lambda L_j$ $(j \neq i$ et λ scalaire quelconque).
   Si $X = (x_1, \ldots, x_p)$ est solution de (S), alors X vérifie la ligne $L'_i = L_i + \lambda L_j$ de (S'), les autres lignes étant identiques dans S et S', X est solution de (S').
   Si $X = (x_1, \ldots, x_p)$ est solution de (S'), alors X vérifie aussi $L'_i - \lambda L'_j = L'_i - \lambda L_j$ car $j \neq i$ et donc la ligne L_j est inchangée dans S'. Or $L'_i - \lambda L_j = L_i$, les autres lignes étant identiques dans S' et S, X est solution de (S).
   Si $j \neq i$, on a bien deux systèmes équivalents.

2.5 Regroupement d'opérations élémentaires

Théorème

On obtient un système équivalent en effectuant une des trois opérations suivantes :
1) Echanger l'ordre des lignes.
2) Multiplier les lignes par des scalaires **non nuls**.
3) Après avoir choisi une ligne L_i, remplacer une ou plusieurs **autres** lignes L_j $(j \neq i)$ par $L_j + \lambda_j L_i$ où les λ_j sont des scalaires quelconques. Attention, **il est essentiel de ne pas modifier la ligne** L_i.

Démonstration

Pour les opérations 1. et 2., on peut décomposer de manière évidente ces opérations en une succession d'opérations élémentaires, donc le système obtenu est équivalent.

Pour l'opérations 3., on peut aussi décomposer cette opération en une succession d'opérations élémentaires de type 3 parce que la ligne L_i est inchangée. Le système obtenu est donc équivalent.

Contre exemple

Le système $\begin{cases} x+y+z=3 \\ \quad\;\; y+z=2 \\ \qquad\;\; z=1 \end{cases}$ admet une solution unique $(x,y,z)=(1,1,1)$.

Si on effectue en une seule étape les opérations $L_1 \to L_1 - L_2$ et $L_2 \to L_2 - L_3$ et $L_3 \to L_3 - L_1$, on obtient le système :

$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ où z est une inconnue secondaire et dont l'ensemble des solutions est la droite passant par $(1,1,0)$ et de vecteur directeur $(0,0,1)$.

Ces deux systèmes ne sont pas équivalents !

2.6 Méthode du Pivot de Gauss

Description

Elle consiste transformer un système (S) donné en un système échelonné (S') équivalent à l'aide des opérations élémentaires.
On échelonne colonne par colonne de la gauche vers la droite.
Pour chaque colonne, on annule les coefficients sous le premier pivot (en descendant la colonne) par des opérations de type 3.
Les opérations de type 1 servent à réorganiser éventuellement le système pour gagner des étapes.
Les opérations de type 2 servent à ramener les pivots à 1 (simplification des calculs).
On peut en plus annuler les coefficients au dessus du pivot, ce qui évite de faire des substitutions pour résoudre le système échelonné (S').

Exemple 1

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+5y \quad\; =3 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$$

Le système peut s'écrire en notation matricielle : $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ \boxed{1} & 5 & 0 & 3 \\ \boxed{2} & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

En utilisant la méthode de Gauss, on obtient les systèmes équivalents suivants :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{4} & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ -L_3 \\ L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 - 4L_2 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{7}{5} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ \frac{L_3}{5} \end{array}$$

Ce système échelonné est compatible et n'a pas d'inconnues secondaires, il admet donc une solution unique. On poursuit la résolution soit en continuant la méthode du pivot soit par substitution.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{7}{5} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 + L_3 \\ L_3 \end{array}$$

Le système admet pour solution unique $(x, y, z) = (1, \frac{2}{5}, \frac{7}{5})$.

Exemple 2

$$\begin{cases} x + y + 3z + 2t = -2 \\ 2x + 3y + 4z + t = -1 \\ 3x + 7y + z - 6t = 6 \end{cases}$$

Le système peut s'écrire en notation matricielle : $\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 2 & -2 \\ \boxed{2} & 3 & 4 & 1 & -1 \\ \boxed{3} & 7 & 1 & -6 & 6 \end{array}\right)$

En utilisant la méthode de Gauss, on obtient les systèmes équivalents suivants :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 & 3 \\ 0 & \boxed{4} & -8 & -12 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ \frac{L_3}{4} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 5 & 5 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array}$$

Ce système échelonné est compatible et a 2 inconnues secondaires z et t, donc il admet des solutions multiples, son ensemble de solutions est un espace affine de dimension 2.
Pour exprimer les solutions sous forme paramétrique, on pose $\lambda = z$ et $\mu = t$, les solutions vérifient

$$\begin{cases} x = -5 - 5\lambda - 5\mu \\ y = 3 + 2\lambda + 3\mu \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\{(-5 - 5\lambda - 5\mu, 3 + 2\lambda + 3\mu, \lambda, \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Exemple 3

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 5y - 2z = 3 \\ 2x - 2y - z = 1 \end{cases} \quad \text{c.a.d. en notation matricielle :} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ \boxed{1} & 5 & -2 & 3 \\ \boxed{2} & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

En utilisant la méthode de Gauss, on obtient les systèmes équivalents suivants :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-4} & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2/4 \\ L_3 + L_2 \end{array}$$

Le système a un pivot sur la colonne des seconds membres donc il est incompatible.

Chapitre VI

Notions élémentaires de géométrie affine

1 Généralités

1.2 Vecteurs

Vocabulaire

On désigne par $\mathcal{E}$ l'Espace (avec une majuscule), c.a.d. l'espace physique à trois dimensions.
Soient A, B des points de l'Espace, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est une grandeur qui mesure le déplacement de A vers B.

Propriété

Soient A, B, C, D des points de l'Espace, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si (A, B, C, D) est un parallélogramme.

Propriété

Soient A, B des points de l'Espace, $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si A et B sont confondus $(A = B)$.

Propriété

Soient A, B des points de l'Espace, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Relation de Chasles

Soient A, B, C, des points de l'Espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

1.3 Espaces vectoriels

Définition : direction

Soit F l'Espace, un plan, une droite ou un singleton, on note $\vec{F} = \{\overrightarrow{AB} \mid A, B \in F\}$, l'ensemble des vecteurs formés avec des points de F.
$\vec{F}$ est appelé direction de F.

Remarque
La direction d'un singleton $\{A\}$ où A est un point est $\{\vec{0}\}$.

Propriété

Soit F l'Espace, un plan ou une droite, $\vec{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{\mathcal{E}}$, c'est-à-dire que :

- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{F}$, $\vec{u} + \vec{v} \in \vec{F}$, c'est la stabilité par addition.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{u} \in \vec{F}$, $\lambda \vec{u} \in \vec{F}$, c'est la stabilité par multiplication par un scalaire (les réels).

Définition : dimension

- La dimension de l'espace $\mathcal{E}$ et de sa direction $\vec{\mathcal{E}}$ est 3.
- La dimension d'un plan P et de sa direction $\vec{P}$ est 2.
- La dimension d'une droite D et de sa direction $\vec{D}$ est 1.
- La dimension d'un singleton $\{A\}$ où A est un point est 0. Sa direction $\{\vec{0}\}$ est aussi de dimension nulle.

Propriété

Soit F et F' deux droites ou deux plans de $\mathcal{E}$ (F et F' sont de même dimension).
$F \parallel F'$ si et seulement si ils ont la même direction, c'est-à-dire $\vec{F} = \vec{F'}$.

Démonstration
Supposons $F \parallel F'$.

Soit $\vec{v} \in \vec{F}$, il existe $A, B \in F$ tels que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.
Soit $C \in F'$. On construit le parallélogramme (A, B, D, C). On a $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et de plus $D \in F'$ car F et F' sont de même dimension et parallèles.

Donc $\vec{v} \in \vec{F'}$. Il suit que $\vec{F} \subset \vec{F'}$.

On montre de même que $\vec{F'} \subset \vec{F}$ donc $\vec{F} = \vec{F'}$. (CQFD)

Inversement, supposons que $\vec{F} = \vec{F'}$.

Si F et F' sont des droites, on note $(\vec{u})$ une base de $\vec{F} = \vec{F'}$.
$\vec{u}$ est un vecteur directeur des droites F et F' donc ces droites sont parallèles. (CQFD)

Si F et F' sont des plans, on note $(\vec{u}, \vec{v})$ une base de $\vec{F} = \vec{F'}$.
On note A et A' des points respectivement de F et F', puis D_u et D'_u les droites de repères respectivement $(A, \vec{u})$ et $(A', \vec{u})$, et enfin D_v et D'_v les droites de repères respectivement $(A, \vec{v})$ et $(A', \vec{v})$.

On a $D_u \parallel D'_u$ et $D_v \parallel D'_v$ avec D_u et D_v sécantes et incluses dans F et D'_u et D'_v sécantes et incluses dans F' donc F et F' sont deux plans parallèles. (CQFD)

1.4 Repères et bases

Définition : repères et bases en dimension 3

On appelle repère de l'espace $\mathcal{E}$, un quadruplet (O, I, J, K) de points non coplanaires de $\mathcal{E}$, le premier point, (ici O), est appelé origine du repère.
Alors, pour tout point $M \in \mathcal{E}$, il existe un unique triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} + z\overrightarrow{OK}$ (*).
(x, y, z) sont appelées coordonnées de M dans le repère (O, I, J, K).
On peut aussi définir un repère de l'Espace par la donnée d'un quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tels que les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont linéairement indépendants (cf. définition ci-dessous).
L'égalité (*) s'écrit alors : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est alors appelée base de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$.

Définition : indépendance linéaire

Soient $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, ..., $\vec{u_p}$, des vecteurs de l'Espace, ces vecteurs sont dits linéairement indépendants si et seulement si :

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n = 0 \end{cases}$$

Propriété : indépendance linéaire de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ **deux** vecteurs de l'Espace, $(\vec{u}, \vec{v})$ sont linéairement indépendants si et seulement si ils ne sont pas colinéaires.

Démonstration
On montre la contraposée : $(\vec{u}, \vec{v})$ ne sont pas linéairement indépendants si et seulement si ils sont colinéaires.

Soient $(\vec{u}, \vec{v})$ non linéairement indépendants. Alors il existe α, β non tous deux nuls tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$.

Supposons par exemple que ce soit β qui soit non nul, alors $\vec{v} = -\frac{\alpha}{\beta}\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. (CQFD)

Soient $(\vec{u}, \vec{v})$ colinéaires, alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

On a donc $\vec{u} - k\vec{v} = \vec{0}$ ou $k\vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$.

Le couple $(\alpha, \beta) = (1, -k)$ ou le couple $(\alpha, \beta) = (k, -1)$ vérifie $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Donc $\vec{u}, \vec{v}$ ne sont pas linéairement indépendants. (CQFD)

Propriété : indépendance linéaire d'un vecteur

Soient $\vec{u}$ un vecteur de l'Espace, $\vec{u}$ est linéairement indépendant si et seulement si il n'est pas nul.

Démonstration
On montre la contraposée : $\vec{u}$ n'est pas linéairement indépendant si et seulement si il est nul.

Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors on a par exemple $1.\vec{u} = 1.\vec{0} = \vec{0}$ donc $\vec{u}$ ne vérifie pas la propriété d'indépendance linéaire. (CQFD)

Si $\vec{u}$ n'est pas linéairement indépendant alors il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda\vec{u} = \vec{0}$ ce qui implique $\vec{u} = 0$. (CQFD)

Définition : repères et bases en dimension 2

On appelle repère d'un plan P, un triplet (O, I, J) de points non alignés de P.
Alors, pour tout point $M \in P$, il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} \quad (*)$.
(x, y) sont appelées coordonnées de M dans le repère (O, I, J).
On peut aussi définir un repère de P par la donnée d'un triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tels que les vecteurs $\vec{i}, \vec{j} \in \vec{P}$ sont linéairement indépendants ce qui est équivalents, **pour deux vecteurs**, à $\vec{i}, \vec{j}$ sont non colinéaires.
L'égalité (*) s'écrit alors : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
$(\vec{i}, \vec{j})$ est alors appelée base de l'espace vectoriel $\vec{P}$.

Définition : repères et bases en dimension 1

On appelle repère d'une droite D, un couple (O, I) de points distincts de D.
Alors, pour tout point $M \in D$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} \quad (*)$.
x est appelée coordonnée de M dans le repère (O, I).
On peut aussi définir un repère de P par la donnée d'un couple $(O, \vec{i})$ tels que le vecteur $\vec{i} \in \vec{D}$ est linéairement indépendant ce qui est équivalent, **pour un vecteur**, à $\vec{i}$ non nul.
L'égalité (*) s'écrit alors : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$.
$(\vec{i})$ est alors appelée base de l'espace vectoriel $\vec{D}$.

2 Plan affine $\mathbb{R}^2$

2.2 Généralités

Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, on considère les couples comme des points.

Définition et propriété : vecteurs de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$

Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points de $\mathbb{R}^2$, on définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,,\, y_B - y_A).$$

On peut alors appliquer toutes les définitions et propriétés de la section 1 concernant les plans, on obtient donc la même géométrie que dans un plan de l'Espace.

2.3 Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$

Propriété

Les sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ sont :

- les espaces de dimension 0, c'est à dire les singletons $\{A\}$ avec $A \in \mathbb{R}^2$.
- les espaces de dimension 1, c'est à dire les droites de $\mathbb{R}^2$.
- le plan $\mathbb{R}^2$ lui-même de dimension 2.

2.4 Équation paramétrique d'une droite de $\mathbb{R}^2$

Propriété

Toute droite de $\mathbb{R}^2$ admet une équation paramétrique de la forme $\begin{cases} x = x_a + \lambda x_u \\ y = y_a + \lambda y_u \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ telle que $(x_u, y_u) \neq (0,0)$.
Inversement, toute partie de $\mathbb{R}^2$ ayant une telle équation paramétrique est une droite de vecteur directeur $\vec{u} = (x_u, y_u)$ passant par $A = (x_a, y_a)$.

Démonstration : On note $M = (x, y)$, $A = (x_a, y_a)$ et $u = (x_u, y_u)$ et D la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$. Ce résultat se déduit de l'équivalence :
$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_a + \lambda x_u \\ y = y_a + \lambda y_u \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \; M \in D$.

2.5 Équation cartésienne d'une droite de $\mathbb{R}^2$

Propriété

Toute droite de $\mathbb{R}^2$ admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
Inversement, toute partie de $\mathbb{R}^2$ admettant une telle équation est une droite de vecteur directeur $\vec{u} = (-b, a)$ passant par $A = (\frac{-c}{a}, 0)$ si a est non nul, $A = (0, \frac{-c}{b})$ sinon.

Démonstration : Soit D une droite de $\mathbb{R}^2$. Soit $A = (x_a, y_a)$ un point de D et $\vec{u} = (x_u, y_u)$ un vecteur directeur.
$M = (x, y) \in D$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{u}$, c'est-à-dire $(x - x_a, y - y_a)$ est proportionnel (x_u, y_u), qui équivaut, d'après les produits en croix à : $y_u(x - x_a) = x_u(y - y_a)$ ce qui s'écrit $y_u x - x_u y - y_u x_a + x_u y_a = 0$.
Comme $(x_u, y_u) \neq (0, 0)$, on a bien une équation de la forme attendue.

Inversement, soit $(a, b) \neq (0, 0)$ et F la partie d'équation $ax + by + c = 0$ (1). Supposons $a \neq 0$, (x, y) est solution de (1) si et seulement si il existe λ tel que $\begin{cases} x = \frac{-c-b\lambda}{a} \\ y = \quad \lambda \end{cases}$. Il s'agit de l'équation paramétrique de la droite passant par $A = (\frac{-c}{a}, 0)$ et de vecteur directeur $(\frac{-b}{a}, 1)$ colinéaire à $\vec{u} = (-b, a) \neq 0$.

Si $a = 0$, nécessairement $b \neq 0$, par le même raisonnement on en déduit que $(x, y) \in F$ si et seulement si il existe $\lambda \in$ tel que $(x, y) = (0, \frac{-c}{b}) + \lambda(1, \frac{-a}{b})$. F est donc la droite passant par $A = (0, \frac{-c}{b})$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (-b, a)$.

Propriété : équation cartésienne de la direction d'une droite

Soit D une droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
Sa direction $\vec{D}$ admet pour équation cartésienne $ax + by = 0$, c'est-à-dire l'équation cartésienne homogène associée à celle de D.

Démonstration
Soit $A = (x_A, y_A) \in D$ et $B = (x_B, y_B) \in D$. On a $ax_A + by_A + c = 0$ (1) et $ax_B + by_B + c = 0$ (2).

Alors $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ vérifie $a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) = 0$ par soustraction des égalités (2) et (1).

Donc les vecteurs de $\vec{D}$ vérifie l'équation $ax + by = 0$.

Inversement, une fois choisi un point $A = (x_A, y_A) \in D$, tout vecteur $\vec{v} = (x, y)$ vérifiant $ax + by = 0$ peut s'écrire $\vec{v} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ avec $B = (x_A + x, y_A + y)$.

Comme $a(x_A + x) + b(y_A + y) = (ax_A + by_A) + (ax + by) = -c$, on a $B \in D$ et donc $\vec{v} \in \vec{D}$.

Théorème : équations de droites parallèles

Soit D et D' deux droites de $\mathbb{R}^2$ d'équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.
$D \parallel D' \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$.

Démonstration : D et D' ont pour vecteur directeur respectivement $\vec{u} = (-b, a)$ et $\vec{u'} = (-b', a')$.

$D \parallel D'$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires, c.a.d. $(-b, a)$ et $(-b', a')$ sont proportionnels, c.a.d. $-ba' = -ab'$ (produit en croix), qui s'écrit aussi $ab' - a'b = 0$.

3 Espace affine $\mathbb{R}^3$

3.2 Généralités

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, on considère les triplets comme des points.

Définition et propriété : vecteurs de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$

Soient $A = (x_A, y_A, z_A)$ et $B = (x_B, y_B, z_B)$ deux points de $\mathbb{R}^3$, on définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\ ,\ y_B - y_A\ ,\ z_B - z_A).$$

On peut alors appliquer toutes les définitions et propriétés de la section 1 concernant l'Espace, on obtient donc la même géométrie que dans l'Espace.

3.3 Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$

Propriété

Les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ sont :

- les espaces de dimension 0, c'est à dire les singletons $\{A\}$ avec $A \in \mathbb{R}^3$.
- les espaces de dimension 1, c'est à dire les droites de $\mathbb{R}^3$.
- les espaces de dimension 2, c'est à dire les plans de $\mathbb{R}^3$.
- l'espace $\mathbb{R}^3$ lui-même de dimension 3.

3.4 Plans de $\mathbb{R}^3$

Propriété : équation paramétrique d'un plan de $\mathbb{R}^3$

Tout plan de $\mathbb{R}^3$ admet une équation paramétrique de la forme $\begin{cases} x = x_a + \lambda x_u + \mu x_v \\ y = y_a + \lambda y_u + \mu y_v \\ z = z_a + \lambda z_u + \mu z_v \end{cases}$ de paramètres $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et où $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ et $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$ sont non colinéaires.
Inversement, toute partie de $\mathbb{R}^3$ ayant une telle équation paramétrique est un plan de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

Démonstration : même méthode que pour les droites.

Propriété : équation cartésienne d'un plan de $\mathbb{R}^3$

Tout plan P de $\mathbb{R}^3$ admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
Inversement, toute partie de $\mathbb{R}^3$ admettant une telle équation est un plan P dont la direction $\vec{P}$ admet pour équation cartésienne $ax + by + cz = 0$, c.a.d. l'équation homogène associé à celle de P.

Démonstration
Soit P un plan de $\mathbb{R}^3$ et $(A, \vec{u}, \vec{v})$ un repère de P avec $A = (x_a, y_a, z_a)$, $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ et $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$.

$M = (x, y, z) \in P \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} x = x_a + \lambda x_u + \mu x_v \\ y = y_a + \lambda y_u + \mu y_v \\ z = z_a + \lambda z_u + \mu z_v \end{cases}$

Donc $M = (x, y, z) \in P$ si et seulement si le système (S) : $\begin{cases} x = x_a + \lambda x_u + \mu x_v \\ y = y_a + \lambda y_u + \mu y_v \\ z = z_a + \lambda z_u + \mu z_v \end{cases}$ d'inconnues λ et μ admet au moins une solution.

On échelonne (S) par la méthode de Gauss. Il existe au moins une composante de $\vec{u}$ non nulle car $\vec{u} \neq \vec{0}$. Supposons que ce soit x_u.

$$\text{(S)} \Leftrightarrow \begin{cases} x_u\lambda + x_v\mu = x - x_a & L_1 \\ x_u y_u\lambda + x_u y_v\mu = x_u(y - y_a) & x_u L_2 \\ x_u z_u\lambda + x_u z_v\mu = x_u(z - z_a) & x_u L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_u\lambda + x_v\mu = x - x_a & L_1 \\ (x_u y_v - x_v y_u)\mu = x_u(y - y_a) - y_u(x - x_a) & L_2 - y_u L_1 \\ (x_u z_v - x_v z_u)\mu = x_u(z - z_a) - z_u(x - x_a) & L_3 - z_u L_1 \end{cases}$$

Ce système est compatible si et seulement si les deux dernières équations sont proportionnelles, c.a.d. avec les produits en croix :

$$\big(x_u y_v - x_v y_u\big)\big(x_u(z - z_a) - z_u(x - x_a)\big) = \big(x_u z_v - x_v z_u\big)\big(x_u(y - y_a) - y_u(x - x_a)\big) \qquad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow (y_u z_v - y_v z_u)x_u(x - x_a) - (x_u z_v - x_v z_u)x_u(y - y_a) + (x_u y_v - x_v y_u)x_u(z - z_a) = 0$$

$$(1) \Leftrightarrow (y_u z_v - y_v z_u)(x - x_a) - (x_u z_v - x_v z_u)(y - y_a) + (x_u y_v - x_v y_u)(z - z_a) = 0 \quad \text{car } x_u \neq 0.$$

Finalement (1) s'écrit $ax+by+cz+d = 0$ avec $\begin{cases} a = y_u z_v - y_v z_u \\ b = -x_u z_v + x_v z_u \\ c = x_u y_v - x_v y_u \\ d = -x_a(y_u z_v - y_v z_u) + y_a(x_u z_v - x_v z_u) - z_a(x_u y_v - x_v y_u) \end{cases}$

De plus, si on avait $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seraient colinéaires (produits en croix) ce qui est contradictoire avec $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère de P.

Conclusion : P admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Inversement, soit F une partie de $\mathbb{R}^3$ qui admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b et c non tous nuls.
Supposons par exemple que $a \neq 0$.
$M = (x, y, z) \in F \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z - \frac{d}{a}$.

On obtient donc l'expression paramétrique $F = \{(-\frac{d}{a} - \frac{b}{a}\lambda - \frac{c}{a}\mu, \lambda, \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

On pose $A = (\frac{-d}{a}, 0, 0)$, $\vec{u} = (-\frac{b}{a}, 1, 0)$ et $\vec{v} = (-\frac{c}{a}, 0, 1)$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (composantes non proportionnelles par les produits en croix) donc F est un plan de repère $(a, \vec{u}, \vec{v})$.

Enfin, soient $M = (x, y, z)$ et $M' = (x', y', z')$ des points de F, $\overrightarrow{MM'} = (x - x', y - y', z - z')$ vérifie $a(x - x') + b(y - y') + c(z - z') = 0$ donc la direction $\vec{F}$ de F admet pour équation $ax + by + cz = 0$.

Conclusion : L'ensemble d'équation $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est un plan dont la direction a pour équation $ax + by + cz = 0$.

Théorème : équations cartésienne de plans parallèles

> Soit P et P' des plans de $\mathbb{R}^3$ d'équations $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.
> $P \parallel P' \Leftrightarrow (a, b, c)$ et (a', b', c') sont proportionnels.

Démonstration :
Les directions de P et P' ont pour équations $ax + by + cz = 0$ et $a'x + b'y + c'z = 0$.
Donc $P \parallel P'$ si et seulement si ils ont la même direction, autrement dit $ax + by + cz = 0$ et $a'x + b'y + c'z = 0$ sont équivalentes, c'est-à-dire les coefficients de ces deux équations sont proportionnels. (CQFD)

3.5 Droites de $\mathbb{R}^3$

Propriété : équation paramétrique d'une droite de $\mathbb{R}^3$

> Toute droite de $\mathbb{R}^3$ admet une équation paramétrique de la forme $\begin{cases} x = x_a + \lambda x_u \\ y = y_a + \lambda y_u \\ z = z_a + \lambda z_u \end{cases}$ de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et où $(x_u, y_u, z_u) \neq (0, 0, 0)$.
> Inversement, toute partie de $\mathbb{R}^3$ ayant une telle équation paramétrique est une droite de vecteur directeur $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ passant par $A = (x_a, y_a, z_a)$.

Démonstration : identique à celle dans $\mathbb{R}^2$.

Propriété : équation cartésienne d'une droite de $\mathbb{R}^3$

> Toute droite de $\mathbb{R}^3$ admet une équation cartésienne de la forme (S) :$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ avec (a, b, c) et (a', b', c') non proportionnels.
> Inversement, toute partie de $\mathbb{R}^3$ admettant une telle équation est une droite D dont la direction $\vec{D}$ admet pour équation le système homogène associé à (S).

Démonstration : Soit D une droite de $\mathbb{R}^3$. Soit $A = (x_a, y_a, z_a)$ un point de D et $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ un vecteur directeur. $(x_u, y_u, z_u) \neq (0, 0, 0)$, supposons par exemple que $x_u \neq 0$.
$M = (x, y, z) \in D$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{u}$,
c'est-à-dire $(x - x_a, y - y_a, z - z_a)$ est proportionnel (x_u, y_u, z_u),
qui équivaut, d'après les produits en croix à : $\begin{cases} y_u(x - x_a) = x_u(y - y_a) \\ z_u(x - x_a) = x_u(z - z_a) \end{cases}$
c.a.d. $\begin{cases} y_u x - x_u y + x_u y_a - y_u x_a = 0 \\ z_u x - x_u z + x_u z_a - z_u x_a = 0 \end{cases}$.

Comme $x_u \neq 0$, $(y_u, -x_u, 0)$ $(z_u, 0, -x_u)$ ne sont pas proportionnels, on a bien une équation de la forme attendue.

Inversement, si une partie F admet une telle équation, $F = P \cap P'$ où P et P' sont les plans d'équations $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$. Comme (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnels, P et P' ne sont pas parallèles donc leur intersection F est une droite.