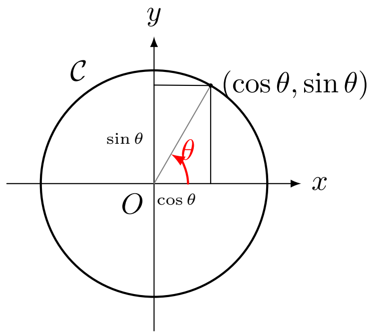
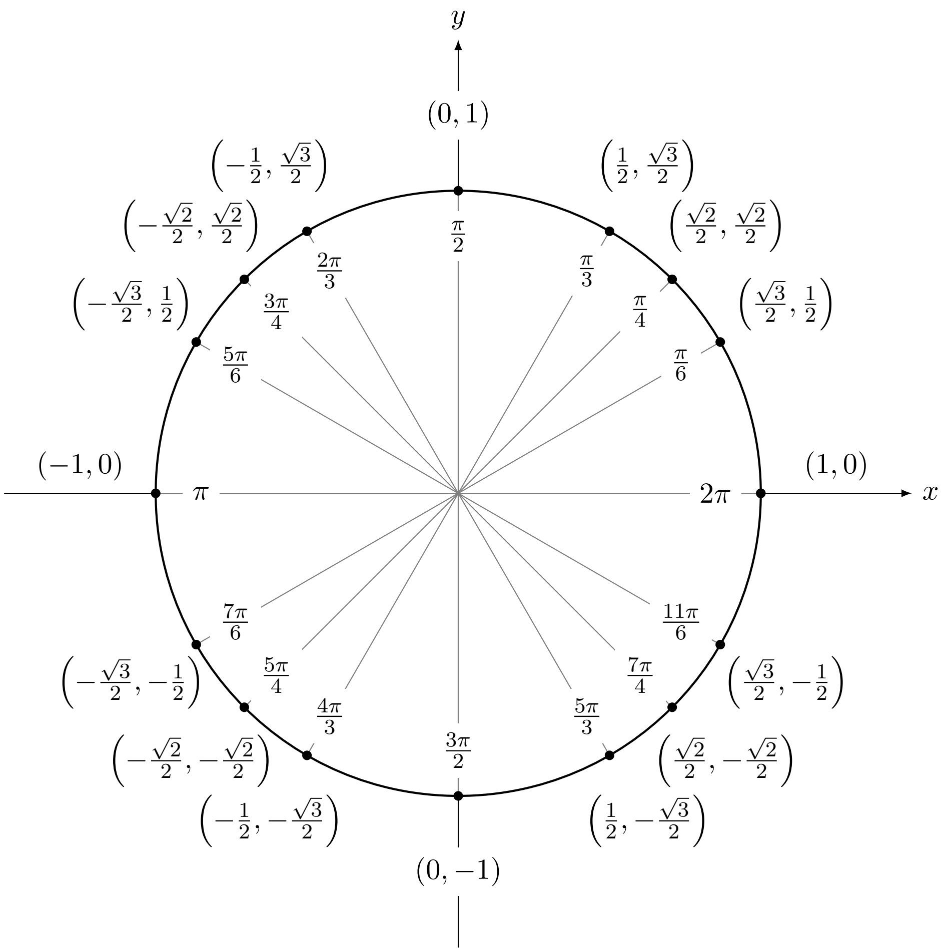
Ch. 2. Nombres complexes

0. Rappels de trigonométrie

Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'origine O de rayon 1. On rappelle que l'on peut illustrer à l'aide de $\mathcal{C}$ les notions de cosinus et de sinus. On appelle ce cercle le cercle trigonométrique.



Valeurs remarquables sur le cercle trigonométrique :



Parité de cosinus et de sinus

Pour tout réel θ,

- $\cos -\theta = \cos\theta$
- $\sin -\theta = -\sin\theta$

Formules d'addition de cosinus et de sinus

Pour tous réels θ et θ',

- $\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$
- $\sin(\theta+\theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'$

Formules de duplication de cosinus et de sinus

Pour tout réel θ,

- $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
- $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$

Proposition

Pour tout réel θ, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Linéarisation du carré Pour tout réel θ,

- $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$
- $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

Considérons l'ensemble $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ muni des opérations suivantes :

- **Addition** : Pour tous (a_1,b_1) et $(a_2,b_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,\ b_1+b_2)$;
- **Multiplication** : Pour tous (a_1,b_1) et $(a_2,b_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(a_1,b_1).(a_2,b_2)=(a_1a_2-b_1b_2,\ a_1b_2+b_1a_2)$.

Concernant cette addition, on peut remarquer que :

- *L'addition est associative et commutative* : Pour tous (a_1,b_1), (a_2,b_2) et $(a_3,b_3)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}((a_1,b_1)+(a_2,b_2))+(a_3,b_3) &= (a_1+a_2,\ b_1+b_2)+(a_3,b_3)\\ &= (a_1+a_2+a_3,\ b_1+b_2+b_3)\\ &= (a_1,b_1)+(a_2+a_3,\ b_2+b_3)\\ &= (a_1,b_1)+((a_2,b_2)+(a_3,b_3))\end{aligned}$$

  et $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,\ b_1+b_2)=(a_2+a_1,\ b_2+b_1)=(a_2,b_2)+(a_1,b_1)$.
- $(0,0)$ *est élément neutre pour l'addition* : Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(a,b)+(0,0)=(a+0,\ b+0)=(a,b)=(0+a,\ 0+b)=(0,0)+(a,b)$.
- *Existence d'un opposé pour l'addition* : Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(a,b)+(-a,-b)=(a-a,b-b)=(0,0)=(-a,-b)+(a,b)$.

Concernant cette multiplication, on peut remarquer que :

- *La multiplication est associative et commutative* : Pour tous (a_1,b_1), (a_2,b_2) et $(a_3,b_3)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}((a_1,b_1).(a_2,b_2)).(a_3,b_3) &= (a_1a_2-b_1b_2,\ a_1b_2+b_1a_2).(a_3,b_3)\\ &= ((a_1a_2-b_1b_2)a_3-(a_1b_2+b_1a_2)b_3,\ (a_1a_2-b_1b_2)b_3+(a_1b_2+b_1a_2)a_3)\\ &= (a_1a_2a_3-b_1b_2a_3-a_1b_2b_3-b_1a_2b_3,\ \ a_1a_2b_3-b_1b_2b_3+a_1b_2a_3+b_1a_2a_3)\\ &= (a_1(a_2a_3-b_2b_3)-b_1(b_2a_3+a_2b_3),\ a_1(a_2b_3+b_2a_3)+b_1(a_2a_3-b_2b_3))\\ &= (a_1,b_1).(a_2a_3-b_2b_3,\ b_2a_3+a_2b_3)\\ &= (a_1,b_1).((a_2,b_2).(a_3,b_3))\end{aligned}$$

et $(a_1,b_1).(a_2,b_2) = (a_1a_2-b_1b_2,\ a_1b_2+b_1a_2) = (a_2a_1-b_2b_1,\ a_2b_1+b_2a_1) = (a_2,b_2).(a_1,b_1)$.

- $(1,0)$ *est élément neutre pour la multiplication* : Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(a,b).(1,0) &= (a\times 1 - b\times 0,\ a\times 0 + b\times 1)\\ &= (a,b) = (1\times a - 0\times b,\ 0\times a + 1\times b)\\ &= (1,0).(a,b).\end{aligned}$$

- *Existence d'un inverse pour la multiplication* : Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tel que $(a,b)\neq(0,0)$, $(a,b).\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(a.\frac{a}{a^2+b^2} - b.\frac{-b}{a^2+b^2},\ a.\frac{-b}{a^2+b^2} + b.\frac{a}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2},\ \frac{-ab+ab}{a^2+b^2}\right) = (1,0) = \left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right).(a,b)$.

Enfin, on retrouve la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :
Pour tous (a_1,b_1), (a_2,b_2) et $(a_3,b_3)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}(a_1,b_1).((a_2,b_2)) + (a_3,b_3)) &= (a_1,b_1).(a_2+a_3, b_2+b_3)\\ &= (a_1(a_2+a_3) - b_1(b_2+b_3),\ a_1(b_2+b_3) + b_1(a_2+a_3))\\ &= ((a_1a_2-b_1b_2) + (a_1a_3-b_1b_3),\ (a_1b_2+b_1a_2) + (a_1b_3+b_1a_3))\\ &= (a_1a_2-b_1b_2,\ a_1b_2+b_1a_2) + (a_1a_3-b_1b_3,\ a_1b_3+b_1a_3)\\ &= (a_1,b_1).(a_2,b_2) + (a_1,b_1).(a_3,b_3).\end{aligned}$$

Avec toutes ces propriétés, on dit que l'ensemble $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ muni de l'addition et la multiplication précédemment définies est un corps. On l'appelle **corps des complexes** et on le note $\mathbb{C}$.

Notation dans $\mathbb{C}$: Le corps des complexes utilise généralement la notation $a+ib$.
Soit $z=(a,\ b)\in\mathbb{C}$ tel que défini précédemment. On a :

$$\begin{aligned}(a,\ b) &= (a,\ 0) + (0,\ b)\\ &= (a,\ 0) + (0,\ 1).(0,\ b)\end{aligned}$$

On pose $i=(0,1)$. Alors pour tout $(a,\ b)\in\mathbb{C}$, on a : $(a,\ b) = (a,\ 0).(1,0) + i.(0,\ b)$. On associe alors au complexe $(a,\ b)$ l'écriture $a+ib$.
On remarque que $i^2 = (-1,\ 0)$.

2. Écriture (ou forme) algébrique

Proposition Unicité de l'écriture algébrique

Soit $z\in\mathbb{C}$. z s'écrit de manière unique sous la forme $a+ib$ avec a et b réels. Cette écriture est appelée *écriture (ou forme) algébrique* de z.

DÉMONSTRATION

L'unicité vient de la définition de la notation $a+ib$ avec a et b réels dans $\mathbb{C}$ correspondant au couple (a,b).

Corollaire

- Soient $x,\ y\in\mathbb{R}$. $x+iy=0$ si et seulement si $x=0$ et $y=0$.
- Soient a, b, c et d des réels. $a+ib=c+id$ si et seulement si $a=c$ et $b=d$.

Définition Parties réelles et imaginaires

Soient a et b deux réels. On pose $z=a+ib$ un nombre complexe. On dit que a est la *partie réelle* de z, notée $\mathrm{Re}(z)$ et que b est la *partie imaginaire* de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

Remarques

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

- Si $b = 0$ alors $z = a \in \mathbb{R}$, donc $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
- Si $a = 0$ alors $z = ib$, on dit alors que z est *imaginaire pur*. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

Propriétés Addition et multiplication

Soient z et s' deux nombres complexes et $a + ib$ et $a' + ib'$ leurs écritures algébriques respectives.

- $z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$;
- $zz' = (a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$;
- Si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

Propriétés Linéarité des parties réelles et imaginaires

Soient z et s' deux nombres complexes et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

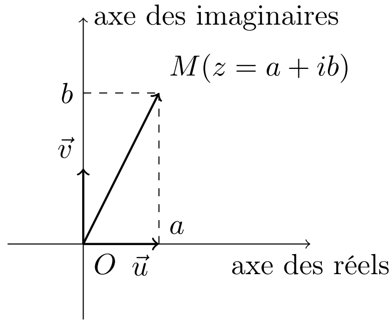
- $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$;
- $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$;
- $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \,\mathrm{Re}(z)$;
- $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \,\mathrm{Im}(z)$.

3. Représentation graphique des nombres complexes

On se place dans un plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Définition-Proposition

On associe à tout nombre complexe z d'écriture algébrique $a + ib$ avec $a,\ b \in \mathbb{R}$ le point M de coordonnées $(a,\ b)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. z détermine M de manière unique et inversement. Le nombre z est appelé *affixe* du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Sa partie réelle est l'abscisse de M et sa partie imaginaire l'ordonnée de M. On notera $M(z)$ le point M d'affixe z.
On définit ainsi le plan complexe.



Propriétés

Soient z et $z' \in \mathbb{C}$.

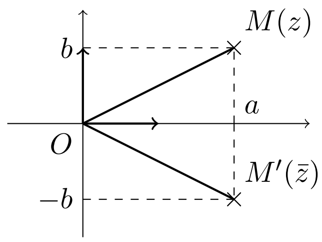
- Soient deux points $M(z)$ et $M'(z')$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal à $z' - z$.
- Soient deux vecteurs $\vec{w}(z)$ et $\vec{w'}(z')$. L'affixe du vecteur $\vec{w} + \vec{w'}$ est égal à $z + z'$.
- Soit $k \in \mathbb{R}$ et soit un vecteur $\vec{w}(z)$. L'affixe du vecteur $k\vec{w}$ est égal à kz.
- Soient deux vecteurs $\vec{w}(z)$ et $\vec{w'}(z')$. Alors $\vec{w} = \vec{w'}$ si et seulement si $z = z'$.

4. Nombre complexe conjugué

Définition

Soit z un nombre complexe d'écriture algébrique $a+ib$. On appelle *conjugué* de z le nombre $a-ib$ et on le note $\bar{z}$.

Interprétation géométrique
Dans le plan complexe, $\bar{z}$ est le symétrique de z par rapport à l'axe des réels.



Propriétés

Soient z et $z' \in \mathbb{C}$.

- $\bar{\bar{z}} = z$;
- $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$;
- $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$;
- Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$.

Démonstration

On pose $z = a+ib$ et $z' = c+id$ leurs écritures algébriques respectives.

- $\bar{z} = a - ib$, donc $\bar{\bar{z}} = a - (-ib) = a + ib = z$;
- $\overline{z+z'} = \overline{a+ib+c+id} = \overline{(a+c)+i(b+d)} = a+c-i(b+d) = a-ib+c-id = \bar{z}+\bar{z'}$;
- $\overline{zz'} = \overline{(a+ib)(c+id)} = \overline{(ac-bd)+i(ad+bc)} = (ac-bd)-i(ad+bc) = a(c-id) - ib(c-id) = (a-ib)(c-id) = \bar{z} \times \bar{z'}$;
- Si $z \neq 0$, $\overline{z \times \frac{1}{z}} = \bar{1} = 1 = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$, donc $\frac{1}{\bar{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$.

Propriétés

Soient $z \in \mathbb{C}$.

- $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$;
- $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$;

Démonstration

On pose $z = a+ib$ son écriture algébrique.

- $\frac{1}{2}(z+\bar{z}) = \frac{1}{2}(a+ib+a-ib) = a$
- $\frac{1}{2i}(z-\bar{z}) = \frac{1}{2-}(a+ib-(a-ib)) = b$

Propriété Caractérisation des réels et des imaginaires purs

Soient $z \in \mathbb{C}$. Alors

- $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z = \bar{z}$;
- $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $z = -\bar{z}$;

Démonstration

On pose $z = a + ib$ son écriture algébrique.
Supposons que $z \in \mathbb{R}$, donc $b = 0$ et $z = a + i \times 0 = a$. Donc $\bar{z} = a - i \times 0 = a$.
Supposons que $z = \bar{z}$, donc $a + ib = a - ib$ donc $a = a$ et $b = -b$, i.e. $b = 0$.
Supposons que $z \in i\mathbb{R}$, donc $a = 0$ et $z = 0 + ib = ib$. Donc $\bar{z} = 0 - ib = -ib = -z$.
Supposons que $z = -\bar{z}$, donc $a + ib = -(a - ib)$ donc $a = -a$ et $b = b$, i.e. $a = 0$. □

5. Module d'un nombre complexe

A. Définition et propriétés

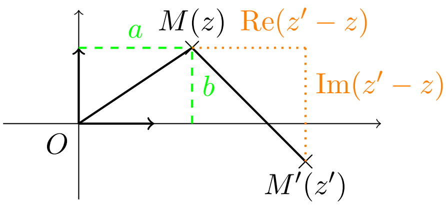
Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$ d'écriture algébrique $a + ib$.
On appelle *module* de z et on note $\mid z \mid$ le réel positif $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarque

Si $z \in \mathbb{R}$, alors $b = 0$ et $z = a$. Alors $\mid z \mid = \sqrt{a^2} = \mid a \mid$. La notation du module est donc cohérente avec la notation de la valeur absolue.

Interprétation géométrique
On se place dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni du repère $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$.
Soient $z,\ z' \in \mathbb{C}$ et M et M' les points d'affixe z et z' respectivement. Alors $OM = \mid z \mid$ et $MM' = \mid z' - z \mid$.



Propriétés

Soient $z,\ \ z' \in \mathbb{C}$.

- $\mid \bar{z} \mid = \mid z \mid$.
- $\mid zz' \mid = \mid z \mid\mid z' \mid$. En particulier, si $z = \lambda \in \mathbb{R}$, $\mid \lambda z' \mid = \mid \lambda \mid\mid z' \mid$.
- si $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

Démonstration

On pose $z = a + ib$ et $z' = c + id$, avec $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$.

- $|\bar{z}| = |a - ib| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$
-
$$\begin{aligned}
|zz'| &= |(ac - bd) + i(ad + bc)| \\
&= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd} \\
&= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} \\
&= \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)} \\
&= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\
&= |z||z'|
\end{aligned}$$

- Si $z \neq 0$, $\left|z \times \frac{1}{z}\right| = |1| = 1 = |z| \times \left|\frac{1}{z}\right|$ donc $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

Propriétés

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$
- $|z|^2 = z\bar{z}$
- Si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

DÉMONSTRATION

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = a + ib$ avec $a,\ b \in \mathbb{R}$.

- Si $z = 0$, alors $|z| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$.
  Si $z \neq 0$, alors $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ donc $a^2 \neq 0$ ou $b^2 \neq 0$ donc $a^2 + b^2 > 0$. Ainsi $|z| > 0$ et donc $|z| \neq 0$.
  Ainsi $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
- $|z|^2 = a^2 + b^2 = a^2 - (i)^2 b^2 = (a + ib)(a - ib) = z\bar{z}$.
- Si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Exemple

$z = 5 - 3i$ alors $\frac{1}{z} = \frac{5+3i}{34}$.

Attention ! De manière générale, si z et $z' \in \mathbb{C}$, $|z + z'| \neq |z| + |z'|$

Exemple

Si $z = 2 + i$ et $z' = 1 - i$, $|z + z'| = |3| = 3$ et $|z| + |z'| = \sqrt{5} + \sqrt{2}$.

Propriété

Soient $z,\ z' \in \mathbb{C}$.

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{z}z') + |z'|^2$$

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')\overline{(z + z')} \\ &= (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') \\ &= z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}' \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + z\bar{z}' + z'\bar{z} \end{aligned}$$

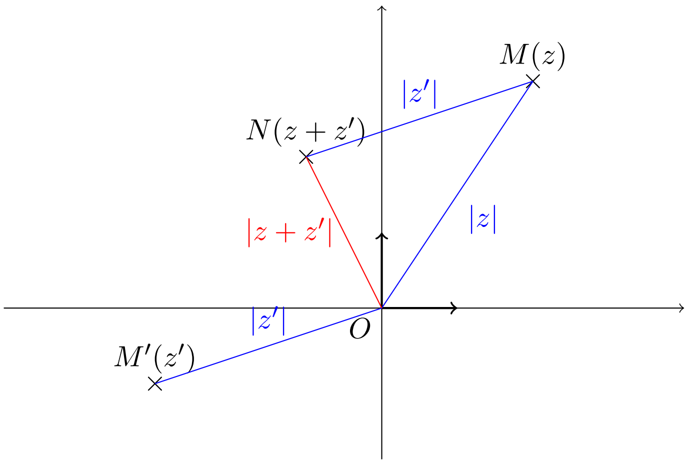
On pose $t = \bar{z}z'$ donc $\bar{t} = z\bar{z}'$. Ainsi $z\bar{z}' + z'\bar{z} = t + \bar{t} = 2\operatorname{Re}(t) = 2\operatorname{Re}(\bar{z}z')$.
Donc $|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{z}z') + |z'|^2$.

Proposition Inégalité triangulaire

Pour tous $z,\ z' \in \mathbb{C}$,

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Interprétation géométrique
On se place dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni du repère $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$.
Soient $z,\ z' \in \mathbb{C}$ tels que $z = 2 + 3i$ et $z' = -3 - i$. On pose M et M' les points d'affixe z et z' respectivement.
On note N le point d'affixe $z + z'$.



Pour démontrer l'inégalité triangulaire, nous allons utiliser le résultat suivant :

Lemme

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.

Démonstration

$z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Or pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 \leq a^2 + b^2$ et $b^2 \leq a^2 + b^2$. Donc $|a| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ et $|b| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.

Démonstration Inégalité triangulaire

On a $|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{z}z') + |z'|^2$ et $(|z|+|z'|)^2 = |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 = |z|^2 + 2|\bar{z}||z'| + |z'|^2 = |z|^2 + 2|\bar{z}z'| + |z'|^2$.
En utilisant le lemme précédent, on a donc que $(|z| + |z'|)^2 \geq |z|^2 + 2|\operatorname{Re}(\bar{z}z')| + |z'|^2$
et donc que $(|z| + |z'|)^2 \geq |z|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{z}z') + |z'|^2 = |z + z'|^2$ donc $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

B. Nombres complexes de module 1

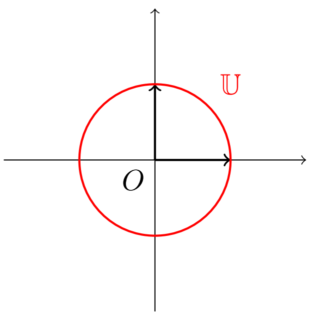
Notation

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Remarque

Soit $z \in \mathbb{U}$ donc par définition, $|z| = 1$. Donc si on pose M point d'affixe z dans le plan complexe, alors $OM = 1$, donc M appartient au cercle de centre O et de rayon 1.

Interprétation géométrique



Propriétés

Soient $z, z' \in \mathbb{U}$.

- $\bar{z} \in \mathbb{U}$

- $zz' \in \mathbb{U}$
- $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$

Proposition Caractérisation des éléments de $\mathbb{U}$

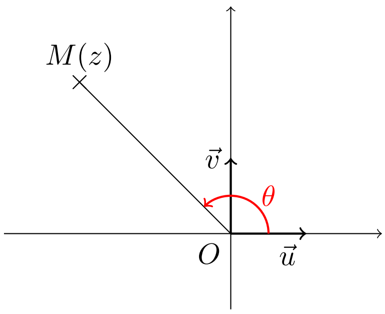
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, z est un élément de $\mathbb{U}$ si et seulement si $\frac{1}{z} = \bar{z}$.

Démonstration

Supposons $z \in \mathbb{U}$ donc $|z| = 1$. Comme $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, on a donc $\frac{1}{z} = \bar{z}$.
Inversement, supposons que $\frac{1}{z} = \bar{z}$. Donc $z \times \frac{1}{z} = z\bar{z} = |z|^2$. Donc $|z|^2 = 1$ donc $|z| = 1$, i.e. $z \in \mathbb{U}$.

6. Argument d'un nombre complexe

Interprétation géométrique
Soit M un point d'affixe z dans le plan complexe P.



M peut être aussi défini par la longueur OMet l'angle $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On considère le point M d'affixe z.
On appelle *argument de* z, et on le note $\mathrm{Arg}(z)$, toute mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$

Remarques

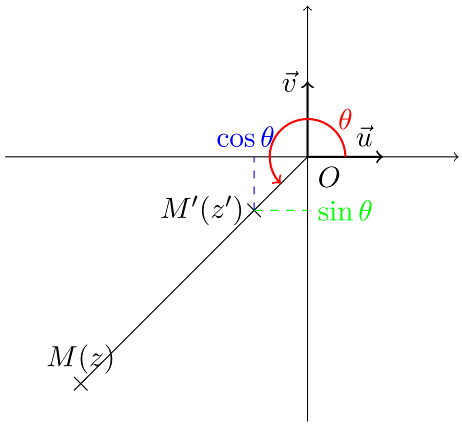
- On utilise généralement la mesure de l'angle entre $[0, 2\pi[$.
- L'argument est défini à $2k\pi$ près, i.e. modulo 2π.

Propriété

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose $\theta = \arg(z)$.
Alors $\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ et $\sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$.

Démonstration

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
$z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z) = |z|\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} + i\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}\right)$.
On pose $z' = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} + i\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$, alors $|z'| = \left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}\right)^2$, i.e. $|z'| = \frac{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}{|z|^2} = 1$. Donc $z' \in \mathbb{U}$, de plus $\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \leq 1$ et $\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} \leq 1$. Donc $M'(z')$ appartient au cercle trigonométrique. Donc $\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ et $\sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$ par définition de l'écriture algébrique.



Règles de calcul :
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $z_1 \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\operatorname{Arg}(z_1) \equiv 0 \mod \pi$
- $z_1 \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $\operatorname{Arg}(z_1) \equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$
- $\operatorname{Arg}(-z_1) \equiv \operatorname{Arg}(z_1) + \pi \mod 2\pi$
- $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) \equiv \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \mod 2\pi$
- $\operatorname{Arg}(\bar{z_1}) \equiv -\operatorname{Arg}(z_1) \mod 2\pi$
- $\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z_1}\right) \equiv -\operatorname{Arg}(z_1) \mod 2\pi$

Démonstration

On pose $\theta_1 = \arg(z_1)$ et $\theta_2 = \arg(z_2)$.

- $z_1 \in \mathbb{R}$ ssi $M(z_1)$ se trouve sur l'axe des réels ssi $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv 0[2\pi]$ ou $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \pi[2\pi]$ ssi $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv 0[\pi]$
- $z_1 \in i\mathbb{R}$ ssi $M(z_1)$ se trouve sur l'axe des imaginaires ssi $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi]$ ssi $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$
- $M_1(-z_1)$ est le symétrique de $M(z_1)$ par rapport à O donc $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM_1}$ donc $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{M_1O}) \equiv \pi[2\pi]$ donc $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1})$ soit $\operatorname{Arg}(-z_1) \equiv \operatorname{Arg}(z_1) + \pi \mod 2\pi$.
- $z_1 z_2 = |z_1||z_2| \left(\frac{\operatorname{Re}(z_1)}{|z_1|} + i\frac{\operatorname{Im}(z_1)}{|z_1|}\right)\left(\frac{\operatorname{Re}(z_2)}{|z_2|} + i\frac{\operatorname{Im}(z_2)}{|z_2|}\right)$
  $z_1 z_2 = |z_1||z_2| \left(\frac{\operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)}{|z_1||z_2|} + i\frac{\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Re}(z_2) + \operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)}{|z_1||z_2|}\right) = |z_1||z_2|((\cos\theta_1\cos\theta_1 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_1 + \cos\theta_1\sin\theta_2)) = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$. Donc $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$.
- $\operatorname{Arg}(z_1\bar{z_1}) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(\bar{z_1}) = \operatorname{Arg}(|z_1|) \equiv 0[2\pi]$ donc $\operatorname{Arg}(\bar{z_1}) \equiv -\arg(z_1)[2\pi]$
- De même $\operatorname{Arg}\left(z_1\frac{1}{z_1}\right) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z_1}\right) = \operatorname{Arg}(1) \equiv 0[2\pi]$ donc $\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z_1}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi]$

7. Écritures polaire et exponentielle

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose $r = |z|$ et $\theta = \operatorname{Arg}(z)$.
Alors $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelée écriture (ou forme) polaire (ou trigonométrique).
Dans cette écriture, r est un réel *positif* et est unique, θ est un réel déterminé à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$.

A. Fonction exponentielle complexe

Proposition

La fonction

$$\begin{aligned} f: & \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & z = a + ib \mapsto e^a(\cos b + i \sin b) \end{aligned}$$

est un prolongement de la fonction exponentielle réelle.
Cette fonction est appelée *exponentielle complexe* et est notée e^z.

Propriété

Pour tous $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$,

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}.$$

Démonstration

On pose $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$. Alors $z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$.
Donc $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{a+c}(\cos(b + d) + i \sin(b + d)) = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^c((\cos b \cos d - \sin b \sin d) + i(\sin b \cos d + \cos b \sin d)) = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^c(\cos b(\cos d + i \sin d) + i^2 \sin b \sin d + i \sin b \cos d) = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^c(\cos b(\cos d + i \sin d) + i \sin b(\cos d + i \sin d)) = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^c(\cos b + i \sin b)(\cos d + i \sin d) = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$.

Corollaire

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{-z} = (\mathrm{e}^z)^{-1}$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{pz} = (\mathrm{e}^z)^p$.

Corollaire Cas des imaginaires purs

Pour tous $\theta_1,\ \theta_2 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)} = \mathrm{e}^{i\theta_1}\mathrm{e}^{i\theta_2}$.
Pour tous $\theta_1,\ \theta_2 \in \mathbb{R}$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{ip\theta} = (\mathrm{e}^{i\theta})^p$.

Propriété

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta} = \frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}.$$

Démonstration

$\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^0(\cos\theta + i \sin\theta) = \cos\theta + i \sin\theta$.
$\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \cos\theta - i \sin\theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \mathrm{e}^{-i\theta} = \frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}$

B. Ecriture exponentielle

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On note $r = |z|$ et θ un argument de z. Alors z peut s'écrire $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$.

Proposition Formule d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}.$$

Proposition Fomule de Moivre

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

Démonstration

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\mathrm{e}^{i\theta})^n = \mathrm{e}^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

II. Puissance et racine n^{e}

1. Équation du second degré

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On cherche les « racines carrées de z_0 » (« racines 2$^{\mathrm{e}}$ de z_0 »), c'est-à-dire les solutions de l'équation $z^2 = z_0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Remarque

L'équation $z^2 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ a pour unique solution $z = 0$

Démonstration

Il est clair que 0 est une solution.

On suppose par l'absurde que $z \neq 0$ et $z^2 = 0$. En multipliant deux fois de suite chaque membre de l'égalité $z^2 = 0$ par $\frac{1}{z}$, on en déduit que $1 = 0$. Contradiction. □

Proposition (racines carrées en coordonnées polaires)

Soit $z_0 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

L'équation $z^2 = z_0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ a deux solutions qui sont : $\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.

Démonstration

Cela découle de l'égalité suivante : $z^2 - z_0 = (z - \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}})(z + \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}))$. □

Exemple

On choisit $z_0 = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Les racines carrées de $1 + \mathrm{i}$ sont : $2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ et $-2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$.

Proposition (racines carrées en coordonnées cartésiennes)

Soit $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \mathbb{C}$ avec $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

Pour tout $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$z^2 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = x_0 & \text{(égalité des parties réelles)} \\ 2xy = y_0 & \text{(égalité des parties imaginaires)} \\ \boxed{x^2 + y^2 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}} & \text{(égalité des modules, redondante)} \end{cases}.$$

Ce point de vue permet de résoudre l'équation $z^2 = z_0$ d'inconnue $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, où $x, y \in \mathbb{R}$, en commençant par chercher x^2 et y^2 avec une condition de signe pour xy.

Démonstration

L'équivalence est immédiate. L'affirmation de la fin découle ensuite de :

$$z^2 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \iff \begin{cases} |x| = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + x_0} \\ |y| = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x_0^2 + y_0^2} - x_0} \\ \mathrm{sg}(xy) = \mathrm{sg}(y_0) \quad \text{si } y_0 \neq 0 \end{cases}.$$

Parmi les $\underbrace{2}_{\text{cas } z_0 = 0}$ ou 4 nombres complexes z déduit des deux premières égalités, seuls $\underbrace{1}_{\text{cas } z_0 = 0}$ ou 2 nombres complexes (opposés) réalisent la dernière condition. □

Exemple

On choisit $z_0 = 1 + \mathrm{i}$. Pour tout $z = \underset{\mathbb{R}}{\underset{\Cap}{x}} + \mathrm{i}\underset{\mathbb{R}}{\underset{\Cap}{y}} \in \mathbb{C}$, on a :

$$z^2 = 1+\mathrm{i} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ 2xy = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \text{ ou } y = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ 2xy = 1 \end{cases}.$$

Les deux racines carrées de $1+\mathrm{i}$ sont $\underbrace{\text{donc}}_{\text{(la condition } xy>0 \text{ les impose)}}$: $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ et $-\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$.

Proposition

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On pose $\Delta := b^2 - 4ac$ et fixe $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sont :

$$\boxed{-\tfrac{b}{2a} \text{ si } \Delta = 0, \quad \text{ou,} \quad \tfrac{-b-\delta}{2a} \text{ et } \tfrac{-b+\delta}{2a} \text{ (distinctes) si } \Delta \neq 0}.$$

Démonstration

Cela découle de l'égalité suivante : $az^2+bz+c = a\Big((z+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{\delta}{2a})^2\Big)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. □

Remarque

Il résulte de cette démonstration que les nombres complexes obtenus par extensions quadratiques successives à partir de $\mathbb{Q}$ (« constructibles à la règle et au compas ») sont ceux dont les parties réelle et imaginaire sont obtenues à partir de $\mathbb{Q}$ en utilisant des sommes, produits, quotients et extractions de racine carrée. D'après le *théorème de Gauss-Wantzel*, le nombre complexe $e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$ s'obtient ainsi si et seulement si les facteurs premiers impairs de n sont de la forme $2^{2^k} + 1$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

2. Puissance n^{e}

Notation

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On pose : $z^0 = 1$ et $z^n = \overbrace{z \times \cdots \times z}^{n \text{ termes (récurrence)}}$ quand $n \geq 1$.
On note ensuite : $z^n = \frac{1}{z^{-n}}$ quand $n < 0$ et $z \neq 0$.

Lorsque $p, q \in \mathbb{N}$, ou $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $z \neq 0$, on obtient facilement :

$$z^p\, z^q = z^{p+q} \quad \text{et} \quad (z^p)^q = z^{pq}.$$

Remarque

Les propriétés habituelles des sommes partielles des suites arithmétiques et géométriques de nombres réels restent valables pour les suites de nombres complexes (cf. la suite du cours).

Par exemple, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, on a :

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

Notation

(a) On note : $\boxed{0! = 1}$ et $\boxed{n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n}$ « factorielle n », quand $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

(b) On note : $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \overset{\text{si } k\neq 0}{=} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}}$ « k parmi n », quand $n, k \in \mathbb{N}$ et $k \leq n$.

Proposition

On a :

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \text{ quand } n, k \in \mathbb{N} \text{ vrifient } 1 \leq k \leq n.$$

Cela donne un algorithme pour construire la table des $\binom{n}{k}$, appelée « triangle de Pascal »

Démonstration

On a : $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{k}{k} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{(k-1)\cdots 1} + \frac{n-k+1}{k} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{(k-1)\cdots 1} = \frac{n+1}{k} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{(k-1)\cdots 1}$. □

Proposition « formule du binôme de Newton »

Soient $u, v \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On notera $\sum_{k=0}^{n} z_k := z_0 + \cdots + z_n$ lorsque $z_0, ..., z_n \in \mathbb{C}$.

On a : $\boxed{(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} u^n + \underbrace{\binom{n}{1}}_{n} u^{n-1} v + \binom{n}{2} u^{n-2} v^2 + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{1} v^n}$.

Démonstration

On effectue une récurrence sur n.

- (i) On a : $(u+v)^0 = 1 = \binom{0}{0} u^0 v^0$.
- (ii) On suppose la formule vraie pour un certain $n \geq 0$. On a :

$$(u+v)^{n+1} = u\,(u+v)^n + v\,(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n+1-k} v^k + \sum_{k'=0}^{n} \binom{n}{k'} u^{n-k'} v^{k'+1}$$
$$\overset{\text{CV } k = l \text{ et } k'+1 = l}{=} \underbrace{\binom{n}{0}}_{\binom{n+1}{0}} u^{n+1} + \sum_{l=1}^{n} \underbrace{\left(\binom{n}{l} + \binom{n}{l-1}\right)}_{\binom{n+1}{l}} u^{n+1-l} v^l + \underbrace{\binom{n}{n}}_{\binom{n+1}{n+1}} v^{n+1}.$$

Cela signifie que la formule est vraie pour l'exposant $n+1$.

- En conclusion la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. La formule du binôme permet de calculer les parties réelles $\cos(n\theta)$ et imaginaires et $\sin(n\theta)$ de $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$ à l'aide des réels $\cos^k\theta$ et $\sin^k\theta$, avec $0 \leq k \leq n$.

2. La formule du binôme permet aussi d'exprimer $\cos^n\theta$ qui vaut $\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^n$ et $\sin^n\theta$ qui vaut $\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^n$ à l'aide des réels $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$, avec $0 \leq k \leq n$.

Exemple

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. On a : $\cos(3\theta) = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3\right) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\sin^2\theta$.
2. On a aussi : $\cos^3\theta = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}\right) = \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos\theta$.

3. Racine n^{e}

Dans ce paragraphe, on fixe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Proposition

Soit $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

L'équation $Z^n = z$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$ a n solutions qui sont :

$$Z_k := r^{\frac{1}{n}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad \text{où} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Démonstration

Il est clair que $Z=0$ n'est pas solution de $Z^n=z$.

Soit $Z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ de décomposition polaire $Z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}$. On a :

$$\begin{aligned} Z^n=z &\iff R^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Theta}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\\ &\iff R^n=r \quad\text{et}\quad n\Theta\equiv\theta\ [2\pi]\\ &\iff R=r^{\frac{1}{n}} \quad\text{et}\quad \exists k\in\mathbb{Z}\quad n\Theta=\theta+2k\pi\\ &\iff R=r^{\frac{1}{n}} \quad\text{et}\quad \exists k\in\mathbb{Z}\quad \Theta=\tfrac{\theta+2k\pi}{n}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $Z^n=z$ d'inconnue $Z\in\mathbb{C}$ est donc :

$$\mathscr{S}:=\{Z_k\ ;\ k\in\mathbb{Z}\},\text{ où } Z_k:=r^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \qquad \text{avec}$$

$$\forall k,l\in\mathbb{Z}\qquad Z_l=Z_k\iff\left(\exists p\in\mathbb{Z}\quad \tfrac{\theta+2l\pi}{n}=\tfrac{\theta+2k\pi}{n}+2p\pi\right)\iff(\exists p\in\mathbb{Z}\quad l=k+pn).$$

D'où : $\mathscr{S}=\{Z_0,\ldots,Z_{n-1}\}$ avec Z_0, ..., Z_{n-1} distincts. □

Remarques

1. L'équation $Z^n=0$ d'inconnue $Z\in\mathbb{C}$ a pour unique solution 0 (clair).

2. Les images M_0, ..., M_{n-1} de Z_0, ..., Z_{n-1} (cf. la proposition) dans $\mathbb{R}^2$ sont les sommets d'un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $r^{\frac{1}{n}}$:

Définition

(a) On appelle racine n^{e} de l'unité toute solution de l'équation $z^n=1$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

(b) On dit qu'une racine n^{e} de l'unité ζ est *une racine primitive* si le plus petit $l\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que $\zeta^l=1$ est égal à n.

Proposition

(a) Les racines n^{e} de l'unité sont les n nombres complexes $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k}{n}}$ où $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$. Leur somme, qui vaut donc $\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right)^k$, est égale à 0 quand $n\geq 2$.

(b) Soit $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$. La racine n^{e} de l'unité $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k}{n}}$ est une racine n^{e} primitive de l'unité si et seulement si le seul diviseur $d\in\mathbb{N}$ commun à k et n est 1.

Démonstration

(a) Le début découle de la proposition précédente.

Ensuite, lorsque $n\geq 2$: $\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right)^k=\dfrac{1-\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right)^{(n-1)+1}}{1-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}}=0.$

(b) Soit $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$. Pour tout $l\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, on a :

$$\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k}{n}}\right)^l=1\iff\frac{2\pi kl}{n}\equiv 0\ [2\pi]\iff n\text{ divise }kl.$$

Si le seul diviseur $d\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ commun à k et n est 1, alors la condition « n divise kl » implique que n divise l (décomposer n, k, et l en facteurs premiers) et a fortiori $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k}{n}}$ est une racine n^{e} primitive de l'unité.

Si $d\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ est un diviseur commun à k et n, alors $d\neq 0$ et $\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k}{n}}\right)^{\frac{n}{d}}=1$ puis $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k}{n}}$ n'est pas une racine n^{e} primitive de l'unité. □

Exemple

Les racines 4^{e} de l'unité sont 1, i, -1, $-\mathrm{i}$.

Les racines 4^{e} primitives de l'unité sont i et $-\mathrm{i}$.